AVERTISSEMENT

Les pages 3, 5, 7 et 8 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

Cet article a été publié dans le **Bup** *(Bulletin de l'Union des Professeurs de physique et chimie) n° spécial (Cahier Enseignement Supérieur) de juin 1995.*

A PROPOS DU THEOREME DE BERTRAND
relatif aux mouvements
de KEPLER ET ELLIPTIQUE HARMONIQUE

INTRODUCTION

Dans un article récent relatif à la comparaison des mouvements de Képler et elliptique harmonique (voir bibliographie), l'auteur insiste sur le lien fondamental mis en évidence pour la première fois par le mathématicien J. BERTRAND (1873) : parmi tous les mouvements à accélération centrale, d'énergie potentielle attractive uniquement fonction de la distance :

$$U = -\frac{\alpha}{r^n} \qquad (n \neq 0,\ \alpha > 0 \text{ lorsque } n>0,\ \alpha < 0 \text{ lorsque } n<0)$$

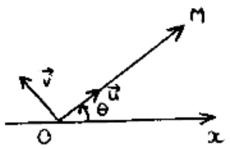
seuls, deux d'entre eux ont une trajectoire fermée :
le mouvement de Képler à potentiel newtonien : $n = 1$
et le mouvement elliptique harmonique à potentiel harmonique : $n = -2$.

Nous nous proposons de rappeler que ce théorème peut être associé à la forme d'une intégrale.

Rappels de dynamique

Dans le plan (P) du mouvement à champ central de potentiel :

$U = -\frac{\alpha}{r^n}$,



le rayon vecteur : $\vec{OM} = r.\vec{u}$

la vitesse : $\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \dot{r}.\vec{u} + r.\dot{\theta}.\vec{v}$

et le moment cinétique, perpendiculaire à (P) :

$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m.\vec{V} = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{K}$ = constante

$$\text{d'où : } \dot{\theta} = \frac{L}{m\,r^2} \qquad (1)$$

Claude TERRIEN

L'énergie mécanique :

$$E = T+U = 1/2\ m.v^2 - \frac{\alpha}{r^n}$$
$$= 1/2\ m.\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n} \qquad = \text{constante},$$

déterminée par les conditions initiales.

La forme du "potentiel effectif"
$U_{eff} = \frac{L^2}{2m.r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$ dépend bien sûr du potentiel central.

La vitesse radiale :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}\right)} \qquad \text{et, d'après (1) :}$$

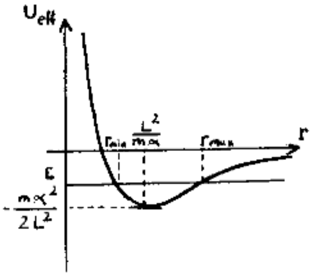
$$d\theta = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E - U_{eff}\right)}}\,.dr \qquad (2)$$

Le sens de variation de la fonction r(t) change lorsque $\dot{r}$ s'annule. L'équation : $E-U_{eff} = 0$

ou : $E = U_{eff} = \frac{L^2}{2m.r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$ (3)

détermine donc les "points de rebroussement", c'est-à-dire les limites du domaine du mouvement en fonction de la distance au centre.

<u>Exemple 1</u> : Le potentiel newtonien ou coulombien attractif



n=1 $U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ $(\alpha > 0)$

r_{min} et r_{max}, racines de l'équation

$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ sont égaux à :

$$\begin{matrix} r_{max} \\ r_{min} \end{matrix} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2m.E}} \qquad (4)$$

Ces expressions, comme la figure ci-dessus, montrent que l'existence d'une trajectoire sans branche infinie suppose :

$$-\frac{m\alpha}{2L^2} < E < 0$$

La solution la plus simple, si elle existe, sera obtenue lorsque la primitive de la fonction :

$$f(r) = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m\,(E - U_{eff})}} = \frac{L}{\sqrt{2m.E.r^4 - L^2.r^2 + 2m\alpha.r^{4-n}}}$$

sera une fraction rationnelle de la fonction inverse d'une fonction trigonométrique.

f(r) ne peut que conduire aux fonctions Arc sin R ou Arc cos R. Encore faut-il pouvoir la mettre sous la forme :

$$f(r).dr = \pm \frac{dR(r)}{\sqrt{1 - R(r)^2}} \times \text{constante}.$$

Ceci n'est possible que dans les deux cas particuliers attendus :

1 - <u>le potentiel est newtonien</u> : n=1 $\alpha > 0$

$$f(r).dr = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m.E - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2m\alpha}{r}}} = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{P(r)}}$$

P(r) peut s'écrire :

$$P(r) = \left(2m.E + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}\right)\left[1 - \left(\frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2m.E + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}\right)^2\right] \quad (7)$$

En posant : $$R(r) = \frac{\frac{L}{r} - \frac{m.\alpha}{L}}{\sqrt{2m.E + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}, \quad f(r).dr = -\frac{dR}{\sqrt{1 - R^2}}$$

En se rappelant que r_{min} et r_{max} sont les racines de P (r), (7) montre que $R(r_{min}) = -1$ et $R(r_{max}) = +1$

$$\Delta\theta = 2\int_{-1}^{+1} -\frac{dR}{\sqrt{1-R^2}} = 2\left|\text{Arc}\cos R\right|_{-1}^{+1} = 2\pi$$

CONCLUSION

Cette propriété commune de la fermeture des trajectoires des mouvements Képlérien et harmonique, exprimée par le théorème de Bertrand, peut donc être associée aux deux seules possibilités de quadrature conduisant à une fonction Arc cos de l'intégrale:

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L.dr}{\sqrt{2m.r^4\ (E - U_{eff})}}$$

Bibliographie

(1) J. SIVARDIERE - Comparaison des mouvements de Képler et elliptique harmonique. BUP n° 751 de Février 1993.

(2) L. LANDAU et E. LIFCHITZ - Mécanique Editions MIR de Moscou (1969).

(3) J. BERTRAND Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.
Tome LXXVII, n° 16 pages 849 à 853 - 2ème semestre de 1873.

en posant : $w = \dfrac{1}{r^{1-n/2}}$

$$\frac{P}{m}.\pi = \frac{1}{1-n/2}\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{2}{2-n}\left|\arc\sin w\right|_0^1 = \frac{\pi}{2-n}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{P}{m} = \frac{1}{2-n}}$$

On en déduit

$\dfrac{P}{m} = \dfrac{1}{\sqrt{2-n}} = \dfrac{1}{2-n}$ qui n'admet qu'une solution :

$n = 1 \qquad \dfrac{P}{m} = 1$, c'est le potentiel newtonien.

<u>**2ème cas : n<o**</u> $\quad r_{max}{}^{n} = o$

et (9) devient : $\dfrac{P}{m}\pi = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^4 - r^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}}$

En posant : $w = \dfrac{1}{r}$ $\dfrac{P}{m}.\pi = \displaystyle\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \left|\text{Arc}\sin w\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P}{m} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2-n}}$$ et $n = -2$, c'est le potentiel harmonique.