

Sur la transformation de BOHLIN

par Claude TERRIEN
24000 Périgueux
claude.terrien@cegetel.net

Dans un article récent – « De Kepler à Hooke avec les complexes » [1] – nous avons étudié une forme de transmutation de la force newtonienne, proportionnelle à l'inverse du carré de la distance du centre de force à un mobile en une force de Hooke proportionnelle à la distance d'un autre centre de force à ce même mobile. Cette relation privilégiée entre les deux systèmes de Kepler et de Hooke, dont l'effet le plus surprenant est le déplacement possible sur la même orbite elliptique de deux mobiles soumis aux deux types de forces, traduit leur dualité. Cette propriété, qui concerne d'autres couples de forces, peut être étudiée avec la géométrie pure sur les traces de Newton, mais aussi avec les transformations conformes.

Nous présentons en particulier l'action de la transformation de Bohlin en $z^{1/2}$ sur le système de Kepler et nous rappelons la solution originale de Needham qui se refuse à faire intervenir directement le temps dans sa démarche. Nous en profitons pour mettre en évidence les liens étroits entre les deux systèmes mécaniques, en montrant notamment que la conservation du tenseur de Fradkin-Jauch-Hill de l'oscillateur harmonique est une conséquence de la conservation du vecteur Laplace-Runge-Lenz dans le champ newtonien. Nous donnons enfin un exemple d'application en mécanique quantique avec le problème de Coulomb en deux dimensions.

1. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE KEPLER AVEC LES COMPLEXES

Après la découverte des trois lois de Kepler sur le mouvement des planètes, au tout début du XVII^{ème} siècle, il fallait, dans un premier temps, trouver la force centrale qui s'exerce sur chacune d'entre elles. C'est le « problème direct » de Kepler, résolu par Newton à travers différentes *Propositions* des *Principia* [2], notamment la *Proposition VII* du *Livre III* qui énonce la loi de la gravitation universelle.

Puis le « problème inverse », c'est-à-dire retrouver la loi des ellipses et plus généralement des coniques en partant de la force centrale newtonienne, s'est ensuite posé. De nombreuses démonstrations [3] de ce problème, dont les plus anciennes datent du XVII^{ème} siècle, ont été établies en faisant appel aux géométries pure et analytique. Dans une période plus récente, certains auteurs [4] ont utilisé les complexes. C'est la solution que nous reprenons parce qu'elle va faciliter l'introduction de transformations conformes.

1.1. Les éléments du problème

On considère une particule matérielle P_K , de masse m , soumise à l'action d'une force centrale attractive F_K , proportionnelle à l'inverse du carré de la distance du centre de force S au mobile. On sait qu'un tel mouvement à accélération centrale est plan car le moment angulaire du point mobile est constant.

Le mouvement est étudié par rapport à un repère orthonormé direct (S', i, j, k) de la figure 1 ou (S, i, j, k) de la figure 2. Les axes $S'x$ et $S'y$ (ou Sx et Sy), de vecteurs unitaires i et j ,

sont situés dans le plan (P). Le point P_K est aussi repéré par ses coordonnées polaires ρ et l'angle $(S'x, S'P_K) = \theta$ appelé anomalie vraie en astronomie.

$S'P_K$ étant le rayon vecteur et \mathbf{v} le vecteur vitesse instantanée en P_K , le moment angulaire, perpendiculaire à (P), est égal à :

$$C_K = S'P_K \times \mathbf{v} = C_K \cdot \mathbf{k} = (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) \mathbf{k} = \rho^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \mathbf{k} = \text{constante} \quad (1)$$

en précisant que nous ne considérerons que les mouvements pour lesquels cette constante est positive, les résultats lorsqu'elle est négative se déduisant facilement de ceux obtenus dans le cas contraire.

L'aire balayée par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps dt étant égale à :

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} C_K \cdot dt, \quad C_K \text{ est aussi appelée la constante des aires.}$$

Dans le plan complexe associé au repère $(S', \mathbf{i}, \mathbf{j})$, le rayon vecteur $S'P_K(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j}$ et le point mobile P_K ont la même affixe, fonction du temps t :

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t) = \rho(t) \cdot e^{i \cdot \theta(t)} \quad (2)$$

De même, dans l'espace des vitesses, au vecteur vitesse instantanée \mathbf{v} en P_K , correspond l'affixe :

$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i \cdot \dot{y}(t)$ qui est aussi l'affixe du point V appartenant à l'hodographe (H) du mouvement et défini par $S'V = \mathbf{v}$.

1.2. L'équation du mouvement et sa résolution

L'expression complexe de la force centrale en $\frac{1}{\rho^2}$ est de la forme :

$$F_{K_c} = -k_K \cdot m \frac{z}{|z|^3}, \quad \text{le signe } - \text{ exprimant son caractère attractif. Précisons que par la}$$

suite, nous ne considérerons que des forces attractives.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \cdot \ddot{z} = -k_K \cdot m \frac{z}{|z|^3} \equiv -k_K \cdot m \frac{e^{i \cdot \theta}}{\rho^2} \quad (3)$$

Le moment angulaire (1), intégrale première du mouvement, nous permet de remplacer ρ^2 par $\frac{C_K}{\dot{\theta}}$ dans l'équation (3). On obtient alors :

$$\ddot{z} + \frac{k_K}{C_K} e^{i \cdot \theta} \cdot \dot{\theta} = 0, \quad \text{relation dont l'intégration est immédiate :}$$

$$\dot{z} = i \left(\frac{k_K}{C_K} e^{i \cdot \theta} + h \right) \quad (4)$$

$h = h_1 + i \cdot h_2$ étant une constante d'intégration complexe.

On retrouve ainsi l'équation de l'hodographe : $|\dot{z} - i.h| = \frac{k_K}{C_K}$ (5)

Le développement de l'équation (4) nous donne :

$$\dot{x} + i.\dot{y} = \frac{k_K}{C_K}(i.\cos\theta - \sin\theta) + i.h_1 - h_2, \text{ d'où l'on déduit les composantes de la vitesse :}$$

$$\dot{x} = -\frac{k_K}{C_K}\sin\theta - h_2 \quad \text{et} \quad \dot{y} = \frac{k_K}{C_K}\cos\theta + h_1 \quad (6)$$

Si l'on substitue ces expressions dans l'équation (1), on obtient :

$$\rho\left(\frac{k_K}{C_K} + h_1.\cos\theta + h_2.\sin\theta\right) = C_K \quad (7)$$

qui est l'équation d'une ellipse dont le périhélie est dans la direction (h_1, h_2) .

Si nous considérons le cas où la constante h est réelle ou encore $h_2 = 0$, ce qui implique que la direction du grand axe de l'ellipse soit celle de l'axe $S'x$, l'équation (7) nous donne :

$$\frac{k_K}{C_K}\rho + h_1.x = C_K \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{C_K^2 / k_K}{1 + \frac{h_1 \cdot C_K}{k_K} \cos\theta} \quad (8)$$

On reconnaît là, l'équation classique d'une ellipse (C_T) de grand axe porté par $S'x$, de la forme :

$$\rho = \frac{p}{1 \pm e.\cos\theta} \text{ avec le paramètre } p = \frac{C_K^2}{k_K} \text{ et l'excentricité } e = \left| \frac{h_1}{k_K} \right| \frac{C_K}{k_K} \quad (9)$$

On en déduit les expressions des axes :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{C_K^2}{k_K(1 - e^2)}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{et} \quad c = e.a \quad (10)$$

On peut, dès maintenant, distinguer les deux cas de figures, correspondant aux deux foyers de l'ellipse :

➤ **1.2.1.** La constante h_1 est négative et $\rho = \frac{p}{1 - e.\cos\theta}$.

La représentation polaire de la trajectoire a donc pour pôle le foyer gauche F' confondu avec le centre de force S' (cf. figure 1).

➤ **1.2.2.** La constante h_1 est positive et $\rho = \frac{p}{1 + e.\cos\theta}$.

La représentation polaire de la trajectoire a pour pôle le foyer droit F confondu avec le centre de force S (cf. figure 2).

AVERTISSEMENT

Les pages 4, 7, 9, 10, 12, 13, 15 à 17 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

*Cet article a été publié dans le **Bup** (Bulletin de l'Union des Professeurs de physique et chimie) n° 997 d'octobre 2017.*

1.3. Le moment angulaire et les conditions initiales

Le moment angulaire est déterminé par les conditions initiales. Nous choisissons comme instant initial $t = 0$, l'instant du passage de P_K en A .

À $t = 0$, puisque $\theta = 0$, les composantes de la vitesse $V_{0K} \equiv V_{AK}$ sont égales à :

$\dot{x}_A \equiv \dot{x}(\theta = 0) = 0$ et V_{0K} est perpendiculaire à l'axe des x ;

$\dot{y}_A \equiv \dot{y}(\theta = 0) \equiv V_{AK} \equiv V_{0K} = \frac{k_K}{C_K} + h_1$ et, suivant le signe de h_1 :

$$\text{➤ } h_1 = V_{0K} - \frac{k_K}{C_K} < 0 \quad \text{et} \quad C_K' = S'A \times V_{AK} = (a+c)V_{0K} \quad \text{ou}$$

$$\text{➤ } h_1 = V_{0K} - \frac{k_K}{C_K} > 0 \quad \text{et} \quad C_K = SA \times V_{AK} = (a-c)V_{0K} \quad (11)$$

avec $V_{0K} > 0$, puisqu'on ne considère que les mouvements pour lesquels le moment angulaire est positif.

2. LA TRANSMUTATION DE LA FORCE

2.1. La transformation de la trajectoire

Dans l'article [1] rappelé en introduction, nous avons montré comment la trajectoire elliptique (C_T) d'un point matériel P_K , animé d'un mouvement képlérien autour du centre attractif S confondu avec un foyer, peut aussi être parcourue par un autre point mobile P_H soumis à une force centrale attractive de centre O confondu avec le centre de l'ellipse et proportionnelle à la distance du centre au mobile c'est-à-dire OP_H .

Cette forme de transmutation de la force de gravitation F_K proportionnelle à $1/SP_K^2$ en la force de Hooke F_H proportionnelle à OP_H se démontre géométriquement à partir des *Corollaires 2 et 3* de la *Proposition VII* des *Principia* de Newton. Elle est confirmée par le calcul induit par un changement d'échelle de temps avec l'introduction d'un temps fictif.

Mais il existe une autre possibilité pour aller de la loi de Kepler à la loi de Hooke. Il s'agit de la transformation conforme définie par la relation $w = f(z) \equiv f(P) = z^{1/2}$ (12) qui fait passer du plan complexe des $z = x + i.y = \rho.e^{i.\theta}$ au plan complexe des $w = u + i.v = r.e^{i.\delta}$.

Dans les deux cas de figures (1 et 2), nous choisissons le repère orthonormé du plan des w confondu avec celui du plan des z . Par la relation (12) de définition de la transformation, nous obtenons les relations :

$$x + i.y = (u + i.v)^2 \text{ d'où } x = u^2 - v^2 \text{ et } y = 2u.v \quad (13)$$

$$\text{De même : } \rho = r^2 \text{ et } \theta = 2\delta \quad (14)$$

Appliquées à l'équation (8), elles nous donnent :

$$\frac{k_K}{C_K}(u^2 + v^2) + h_1(u^2 - v^2) = C_K \quad (15)$$

qui est l'équation de la transformée (E'_T) ou (E_T) de la trajectoire de Kepler dans le plan des w . Sachant, d'après (9), que :

➤ si la constante h_1 est négative (cas de figure 1), elle est égale à $h_1 = -\frac{k_K}{C_K}e$.

L'équation (15) devient : $u^2(1-e) + v^2(1+e) = \frac{C_K^2}{k_K}$ ou encore, en divisant par $(1-e^2)$

et avec (10), $\frac{u^2}{1+e} + \frac{v^2}{1-e} = \frac{C_K^2}{k_K(1-e^2)} = a$ et l'équation de (E'_T) s'écrit :

$$\frac{u^2}{a+c} + \frac{v^2}{a-c} = 1 \quad (16)$$

La transformée de la trajectoire (C_T) dans le plan des w est donc une ellipse (E'_T) centrée à l'origine S' et d'axes $a' = \sqrt{a+c}$ et $b' = \sqrt{a-c}$ portés par Su et Sv .

➤ si h_1 est positive (cas de figure 2), alors $h_1 = +\frac{k_K}{C_K}e$ et l'équation de (E_T) :

$$\frac{u^2}{a-c} + \frac{v^2}{a+c} = 1 \quad (17)$$

La transformée de la trajectoire (C_T) dans le plan des w est donc une ellipse (E_T) centrée à l'origine S et d'axes $a' = \sqrt{a+c}$ et $b' = \sqrt{a-c}$ portés par Sv et Su .

Nous remarquons que les ellipses (E'_T) et (E_T) centrées en S' et S sont les « racines carrées » de l'ellipse de foyers S' et S . Ce qui est conforme à un résultat d'Arnold (Corollaire 1-Théorème 1-Annexe 1 de [7]) : « Toute ellipse de foyer O est le carré d'une ellipse (unique) de centre O . »

2.2. La transformation étudiée et le temps

L'affixe (2) de P_K , animée d'un mouvement de Kepler sur l'ellipse (C_T), est une fonction du temps t . Nous allons montrer que la transformée (E'_T) ou (E_T) dans le plan complexe des w , est la trajectoire d'une particule P_H soumise à une force de Hooke et dont l'affixe

$$w(\text{temps}) = u(\text{temps}) + i.v(\text{temps}) = r(\text{temps}).e^{i.\delta(\text{temps})} \quad (18)$$

est une fonction de temps .

Nous avons déjà défini par (1) le moment angulaire de P_K :

$C_K = C_K.k = (x.\dot{y} - y.\dot{x}).k = \rho^2.\dot{\theta}.k$. Dans le plan des w , la grandeur équivalente a pour expression : $C_H = r^2.\dot{\delta}$.

$$m \frac{d^2 w(\tau)}{d\tau^2} = \frac{2}{K^2} \sqrt{z} \cdot m \left(\frac{1}{2} |\dot{z}|^2 - \frac{k_K}{|z|} \right) \text{ dans laquelle nous reconnaissons l'expression de}$$

l'énergie de la particule : $E_K = E_C + E_P$, somme constante des énergies cinétique $\frac{1}{2} m |\dot{z}|^2$ et potentielle $-m \frac{k_K}{|z|}$.

Nous savons que [1,5] :

l'énergie $E_K = -\frac{k_K \cdot m}{2a}$, le moment angulaire $C_K = \omega_K \cdot a \cdot b$, ω_K étant la valeur moyenne dans le temps de la vitesse angulaire de P_K et la constante $k_K = \omega_K^2 \cdot a^3$. De même : $k_H = \omega_H^2$, relation qui va nous être immédiatement utile.

D'où, la nouvelle forme de l'équation du mouvement, F_{H_c} étant l'expression complexe de la force de Hooke :

$$F_{H_c} = m \frac{d^2 w(\tau)}{d\tau^2} = \frac{2}{K^2} \cdot E_K \cdot w(\tau) = -m \frac{k_K}{K^2 \cdot a} w(\tau) = -m \cdot k_H \cdot w(\tau), \text{ qui est l'équation}$$

d'un mouvement elliptique harmonique de constante $k_H = \frac{k_K}{K^2 \cdot a}$ (22)

$$\text{On en déduit l'intensité de } F_H : \quad F_H = -\frac{2}{K^2} E_K |w(\tau)| \quad (23)$$

Il y a donc bien eu, par la transformation conforme $w = z^{1/2}$, transformation de la force de Kepler en force de Hooke.

2.3. Le choix de la constante K

Des choix de la constante K , qui diffèrent selon les auteurs, dépendent ω_H et donc la période de révolution T_H de P_H sur l'image (E'_T) ou (E_T) de l'orbite de P_K .

Si nous choisissons la constante K égale à a , nous constatons que :

$$k_H = \omega_H^2 = \frac{k_K}{a^3} = \omega_K^2 \text{ et } \omega_H = \omega_K, \text{ c'est-à-dire que les vitesses angulaires}$$

moyennes de P_H et P_K sur (E'_T) ou (E_T) et (C_T) et les périodes de révolution T_H et T_K sont égales.

Dans ce cas, on en déduit : $C_H = \frac{C_K}{a} = \frac{\omega_K \cdot a \cdot b}{a} = \omega_H \cdot b$. Ce que l'on peut vérifier en considérant le mouvement harmonique elliptique de P_H sur (E'_T) ou (E_T) pour lequel le moment angulaire [1,5] :

$$C_H = \omega_H \cdot a' \cdot b' = \omega_H \sqrt{a+c} \sqrt{a-c} = \omega_H \cdot b.$$

De même, si la constante K est choisie égale à 1, alors $C_H = C_K$ et $\omega_H = a \cdot \omega_K$ ou $T_K = a \cdot T_H$.

géométriquement dans la *Proposition VII* que cette force est proportionnelle à : $\frac{1}{SP^2 \cdot OP^3}$. Et dans le *Corollaire 1*, plaçant le point S en $S_1 \equiv O$ c'est-à-dire prenant $SP = OP$, il arrive à :

$$^{(2)}(C.F.)_S \sim \frac{1}{S_1 P^5} \equiv \frac{1}{\rho^5}.$$

Si, comme Chandrasekhar [11], on considère une deuxième force centripète attractive en $1/\rho^5$, de centre S_2 , situé comme S_1 sur la circonférence du cercle, on peut démontrer la relation : $\frac{(C.F.)_{S_1}}{(C.F.)_{S_2}} \equiv \frac{F_1}{F_2} \sim \frac{(S_2 P)^5}{(S_1 P)^5}$. Ce qui signifie que la même orbite peut être parcourue

par un deuxième mobile soumis à la force en $1/\rho^5$ de centre S_2 . La force en $1/\rho^5$ est dite **auto-duale** pour un mouvement sur le cercle.

Sur la figure 3, les points représentatifs des lois de forces auto-duales (-5,-5) et (-1,-1), se trouvent à l'intersection du graphe de $N = f(n)$ et de la droite $N = n$.

3. LA DÉMONSTRATION ORIGINALE DE NEEDHAM

Après avoir constaté, comme nous l'avons fait plus haut, qu'il est impossible que les moments angulaires des mobiles P_K et P_H soient tous les deux constants, Needham [9-10] trouve «curieux» que la force F_K soit caractérisée par une équation différentielle temporelle telle que (3) et qu'il soit nécessaire d'introduire un temps fictif. Il a donc cherché une autre démonstration qui évite toute référence directe au temps et ne s'intéresse qu'à la géométrie des orbites.

3.1. La géométrie de la force centrale

3.1.1. Rappel de quelques définitions géométriques [19]

Nous considérons une particule P (cf. figure 5) de masse m , se déplaçant sur une courbe (C) paramétrée régulière ($t \rightarrow P(t)$) sous l'action d'une force centrale F de centre S . $s(t)$ étant l'abscisse curviligne pour une orientation et une origine fixée, le vecteur $t = \frac{dP}{ds}$ est unitaire et tangent à la trajectoire.

En dérivant $\|t\|^2 = t \cdot t = 1$ par rapport à s , on obtient : $2t \cdot \frac{dt}{ds} = 0$. $\frac{dt}{ds}$ est donc orthogonal à t et, par suite, colinéaire au vecteur unitaire n directement orthogonal à t . On sait que le repère orthonormé direct $(P(t), t, n)$ est le repère de Frenet.

Le réel κ , fonction de t ou de s , tel que $\frac{dt}{ds} = \kappa \cdot n$ est la courbure algébrique en $P(t)$.

Son inverse $R(t) = \frac{1}{\kappa}$ est le rayon de courbure algébrique en $P(t)$. Le point $\Omega(t)$, défini par la relation $P\Omega = \kappa \cdot n$, est le centre de courbure en $P(t)$ et le cercle (C_{Cou}) de rayon $R(t)$ et de centre $\Omega(t)$ est le cercle de courbure en ce même point.

⁽²⁾ (C.F.)_S signifie, selon la notation de Chandrasekhar : Force Centrale de centre S.

$$\tilde{F} = -2 \frac{\tilde{C}^2}{C^2} E_K \cdot r \quad (36)$$

Il s'agit bien d'une force de Hooke. Si on choisit $K = a$, alors d'après (19) : $\tilde{C} = \frac{C}{a}$ et $\tilde{F} = -\frac{2}{a^2} E_K \cdot r$, relation identique à l'expression (23) après avoir remplacé K par a .

4. DU VECTEUR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ (LRL) AU TENSEUR DE FRADKIN-JAUCH-HILL (OU LAPLACE) avec la transformation de Bohlin $w = z^{1/2}$

Rappelons tout d'abord les expressions des énergies E_K et E_H des mobiles de Kepler ((17) de [1]) et de Hooke ((43) de [1]) :

$$E_K = \frac{1}{2} m |\dot{z}|^2 - m \frac{k_K}{|z|}, \text{ dans le plan complexe des } z \quad (31)$$

et
$$E_H = \frac{1}{2} m |\dot{w}|^2 + \frac{1}{2} m k_H |w|^2, \text{ dans le plan complexe des } w \quad (32)$$

D'après (20) :
$$\frac{d}{dt} = \frac{K}{2} \frac{1}{|w|^2} \frac{d}{d\tau}$$

et
$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{K}{2} \frac{1}{|w|^2} \frac{d(w^2)}{dt} = K \frac{w \cdot \dot{w}}{|w|^2} \text{ d'où } |\dot{z}| = K \frac{|\dot{w}|}{|w|} \quad (33)$$

E_K peut donc s'écrire :

$$E_K = \frac{1}{2} m K^2 \frac{|\dot{w}|^2}{|w|^2} - m \frac{k_K}{|w|^2}.$$

On tire de l'équation (22) du mouvement de Hooke : $k_H = -\frac{2}{K^2} \frac{E_K}{m}$ (34)

Il en résulte, d'après (32), que :

$$E_H = \frac{1}{2} m |\dot{w}|^2 - \frac{|w|^2}{K^2} E_K = \frac{1}{2} m |\dot{w}|^2 - \frac{|w|^2}{K^2} \left(\frac{1}{2} m K^2 \frac{|\dot{w}|^2}{|w|^2} - m \frac{k_K}{|w|^2} \right) \text{ soit}$$

$$E_H = \frac{1}{K^2} m k_K \text{ ou encore : } k_K = K^2 \frac{E_H}{m} \quad (35)$$

Nous avons établi [1] l'expression du vecteur LRL : $A = -k_K m \frac{SP_K}{\rho} + \mathbf{v} \times \mathbf{L}$ dont

l'affixe, qui est une constante, s'écrit : $A_c = -i.L.\dot{z} - k_K m \frac{z}{|z|}$ (36)

Or, d'après (18) de [1] : $L = \frac{m}{2i} (\bar{z}.\dot{z} - \dot{\bar{z}}.z)$ et $A_c = -\frac{m}{2} (\bar{z}.\dot{z}^2 - \dot{\bar{z}}.\dot{z}.z) - k_K m \frac{z}{|z|}$.

En utilisant les relations (33) et (35), on arrive à :

$$A_c = -K^2 \frac{m}{2} \left(\dot{w}^2 - \frac{|\dot{w}|^2}{|w|^2} w^2 \right) - K^2 \frac{w^2}{|w|^2} E_H \text{ et avec l'expression (32) de } E_H :$$

ANNEXE

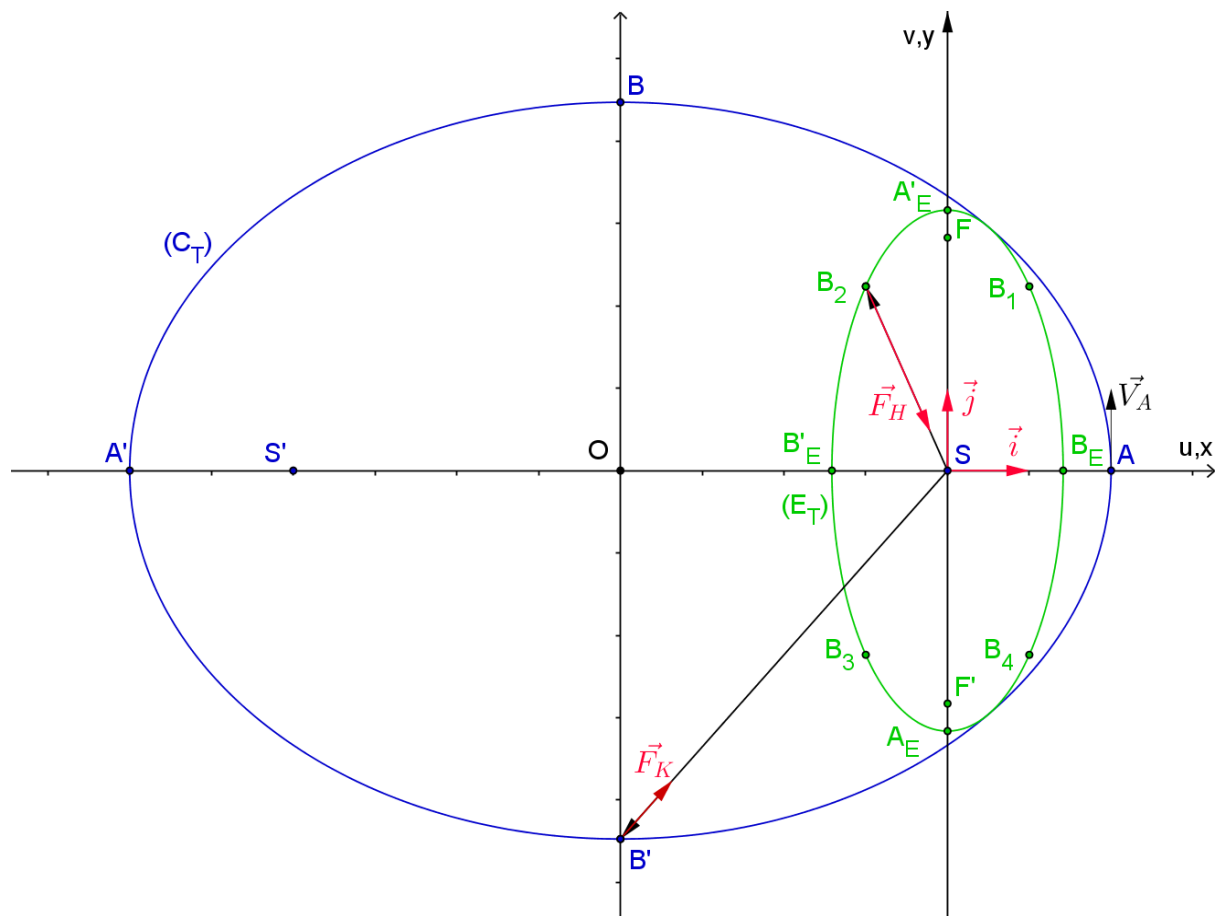


Figure 6. Les positions successives de P_K sur (C_T) et leurs images sur (E_T) .

TABLEAU précisant les divers éléments de la figure 6.

t	0	$T_K/4$	$T_K/2$	$3T_K/4$	T_K	$5T_K/4$	$3T_K/2$	$7T_K/4$	$2T_K$
t en s	0	4	8	12	16	20	24	28	32
P_K	A	B	A'	B'	A	B	A'	B'	A
$z(t)$	$a-c$	$-c+ib$	$-(a+c)$	$-c-ib$	$a-c$	$-c+ib$	$-(a+c)$	$-c-ib$	$a-c$
P_H	B_E	B_1	A'_E	B_2	B'_E	B_3	A_E	B_4	B_E
$w(\tau)$	$\sqrt{a-c}$	$^{(1)}w_{B_1}$	$i\sqrt{a+c}$	$^{(1)}w_{B_2}$	$-\sqrt{a-c}$	$^{(1)}w_{B_3}$	$-i\sqrt{a+c}$	$^{(1)}w_{B_4}$	$\sqrt{a-c}$
τ	0		$T_H/4$		$T_H/2$		$3T_H/4$		T_H
τ en s $K=a$	0		4		8		12		16
τ en s $K=1$	0		2/3		4/3		2		8/3

(1) Affixes des points B_1, B_2, B_3 et B_4 calculées avec les relations (13) :

$$w_{B_1} = \sqrt{\frac{a-c}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a-c)}} \text{ ou } w_{B_1} = \frac{b}{\sqrt{2(a+c)}} + i \sqrt{\frac{a+c}{2}} \text{ et } w_{B_3} = -w_{B_1} ;$$

$$w_{B_2} = -\sqrt{\frac{a-c}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a-c)}} \text{ ou } w_{B_2} = -\frac{b}{\sqrt{2(a+c)}} + i \sqrt{\frac{a+c}{2}} \text{ et } w_{B_4} = -w_{B_2} .$$

Compléments sur le tableau :

Ligne 1 : temps de passage t aux points considérés, en fonction de la période de révolution T_K .

Ligne 2 : temps de passage t aux points considérés en secondes, la vitesse angulaire moyenne

de P_K étant prise égale à $\omega_K = \frac{\pi}{8} \text{ rad} / \text{s}$.

Ligne 3 : positions successives de P_K sur (C_T) .

Ligne 4 : affixes des points considérés dans le plan complexe des z associé au repère (S, i, j) .

Ligne 5 : images des positions de P_K considérées sur l'ellipse (E_T) , image de (C_T) .

Ligne 6 : affixes de ces images dans le plan complexe des w , associé au repère $(\mathbf{O}_u, \mathbf{O}_v)$. Ces affixes sont calculées avec la relation de Bohlin : $w = z^{1/2}$.

Ligne 7 : temps de passage τ aux points considérés, en fonction de la période de révolution T_H . La constante K est prise égale à a (voir le paragraphe 2.3.) pour que $\omega_H = \omega_K$.

Ligne 8 : valeurs du temps fictif τ en secondes, la constante K étant prise égale à $a = 6$ u. (voir le paragraphe 2.3.) pour que $\omega_H = \omega_K$.

Ligne 9 : valeurs du temps fictif τ en secondes, la constante K étant prise égale à 1 (voir le paragraphe 2.3.) pour que $T_H = T_K/a$.

P_K doit bien effectuer deux révolutions complètes sur (C_T) pour que P_H en fasse une sur (E_T) .