

De KEPLER à HOOKE avec les complexes

par Claude TERRIEN
24000 Périgueux
claude.terrien@cegetel.net

INTRODUCTION

Dans un article récent [1], nous avons présenté, après avoir repris dans le détail la solution de Richard Feynman, une deuxième solution géométrique au problème inverse de Kepler.

Nous proposons une reprise de cette deuxième partie sous la forme d'un « parcours » en Mécanique classique qui, partant de l'hodographe d'un mouvement de Kepler nous amène, grâce à une succession de transformations, à l'hodographe d'un mouvement de Hooke, l'ensemble étant accompagné algébriquement par la notation complexe que l'on sait très bien adaptée à la représentation des transformations géométriques.

1. LE PROBLÈME INVERSE

Le mouvement des planètes autour du soleil a été l'une des préoccupations majeures de Newton. Disposant des trois lois que Kepler avait établies à partir des mesures de Tycho Brahé, il commença donc par rechercher la loi de force centrale qui régit le système planétaire. Selon la terminologie ancienne, en vigueur au XVIII^{ème} siècle, il s'agissait là de résoudre le problème de Kepler « **direct** ». C'est ainsi que plusieurs Propositions du Livre 1 des Principia [2], marquent les différentes phases qui conduisent à l'énoncé de la loi de force centrale en $1/r^2$.

Le problème « **inverse** », c'est évidemment retrouver la loi des ellipses et plus généralement des coniques, en partant de la loi de force centrale en $1/r^2$. Entreprise beaucoup plus difficile car elle oblige à partir de la notion théorique de loi de force pour construire la trajectoire, alors que le problème direct se traite en raisonnant sur un objet géométrique connu.

Nous ne reviendrons pas sur les réponses de Newton qui ont donné lieu à d'innombrables débats. Nous rappellerons simplement les noms de quelques savants associés aux solutions analytiques : Alexis Claude Clairaut qui fut le premier en utilisant le calcul différentiel de Leibniz, puis Binet, Lagrange...

2. LES DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

Nous l'avons déjà dit, deux solutions géométriques au problème inverse viennent d'être présentées [1]. Toutes les deux passent par une première construction géométrique : celle du diagramme des vitesses ou hodographe (H) qui est le lieu des extrémités des vecteurs égaux aux vecteurs vitesse instantanée et ayant pour origine commune un point O' intitulé origine de l'hodographe. On retrouve ainsi un résultat établi par William Rowan Hamilton qui fut le premier à montrer que dans le cas de la force centrale newtonienne, l'hodographe est un cercle (dont le centre sera noté O_H).

Il est également démontré en même temps, que de la position de O' par rapport au diagramme des vitesses (H), dépendra la nature de la trajectoire. Si O' est à l'intérieur du cercle, elle sera elliptique, ce qui correspond, bien sûr, au cas des planètes.

À partir de là, les deux solutions étudiées diffèrent par la position du centre des forces S . Pour construire l'orbite, Feynman le fait coïncider avec le centre O_H du diagramme des vitesses : $S \equiv O_H$.

Dans le deuxième cas, il est placé en O' , l'origine de l'hodographe :

$$S \equiv O'.$$

Par la suite, nous n'utiliserons pour ce point que l'appellation S .

Le mouvement à accélération centrale du point matériel P_K , est étudié par rapport à un repère orthonormé direct $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine est en S . Les axes Sx et Sy , de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} , sont situés dans le plan du mouvement. Le point P_K est aussi repéré par ses coordonnées polaires ρ et l'angle $(Sx, SP_K) = \theta$ appelé **anomalie vraie** en astronomie..

$\overline{SP_K} = \rho \cdot \vec{u}$ étant le rayon vecteur et \vec{v} le vecteur vitesse instantanée en P_K , on sait que le **moment angulaire** est constant et perpendiculaire au plan du mouvement :

$$\vec{C} = \overline{SP_K} \times \vec{v} = \rho^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{k} = C \cdot \vec{k} \quad (1)$$

C étant une constante.

L'aire balayée dans l'ellipse par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps dt est égale à :

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} C \cdot dt. \text{ C'est pourquoi } C \text{ est aussi appelée } \mathbf{constante des aires}.$$

Il est facile de montrer [1] que la trajectoire (C_T) se déduit de l'hodographe (H) par le produit de trois transformations géométriques (cf. **figure 1**) :

- une rotation $\mathcal{R}(S, -\frac{\pi}{2})$, de centre S et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ radians, qui donne un cercle (H') de centre O_H ;
- l'inversion $\mathcal{I}(S, C)$, de centre S et de puissance C , qui donne la podaire (C_P) de l'orbite ;
- la construction de l'antipodaire de (C_P) qui donne la trajectoire (C_T).

C'est ainsi que les transformés du point V de l'hodographe (H) sont successivement V' du cercle (H'), P_o de la podaire (C_P) puis P_K de l'orbite (C_T) et dont la vitesse instantanée \vec{v} est égale à \overline{SV} .

AVERTISSEMENT

Les pages 4, 6, 7, 9 à 11, 13, 14, 16 à 18, 20 et 23 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

*Cet article a été publié dans le **Bup** (Bulletin de l'Union des Professeurs de physique et chimie) n° 989 de décembre 2016.*

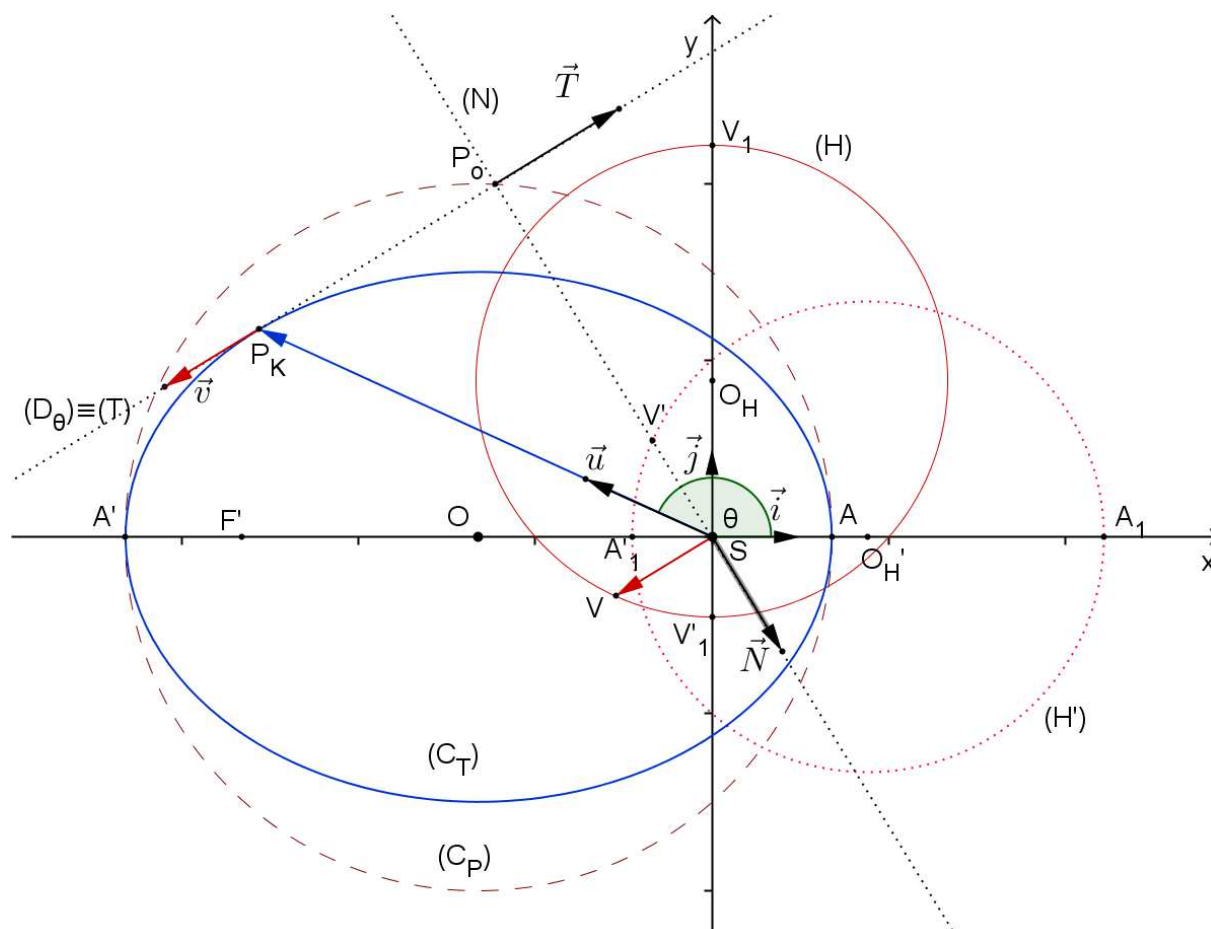


Figure 1. De l'hodographe (H) à la trajectoire (C_T).

3. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Considérons les points A , B , M et M' du plan complexe P (voir **figure 2**), muni du repère orthonormé direct $(S, \vec{i}, \vec{j}) \equiv (\overline{Sx}, \overline{Sy})$.

Leurs affixes respectives étant notées a , b , $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$:

$a + b$ est l'affixe du vecteur $\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{SB}$;

$b - a$ est l'affixe du vecteur $\overline{AB} = \overline{SB} - \overline{SA}$.

Le conjugué de z étant égal à $\bar{z} = x - i.y$ et \mathcal{Re} et \mathcal{Im} désignant les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe :

$$x = \mathcal{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } y = \mathcal{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sachant que les produits $z \cdot \bar{z}'$ et $\bar{z} \cdot z'$ sont égaux à :

$$z \cdot \bar{z}' = (x + i.y)(x' - i.y') = x.x' + y.y' + i(-x.y' + x'.y) \text{ et}$$

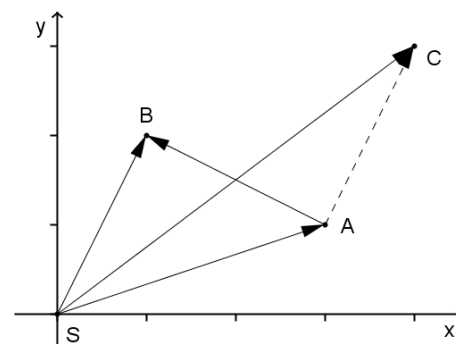


Figure 2. Vecteurs d'affixes a , b ,...

$$z \cdot \bar{z} - \bar{z}_0 \cdot z - z_0 \cdot \bar{z} + \lambda = 0 \quad (6)$$

avec $\lambda = |z_0|^2 - R^2$ réel et $|z_0|^2 - \lambda = R^2 > 0$.

Nous aurions pu aussi utiliser, comme précédemment l'équation bien connue du cercle :

$x^2 + y^2 - 2a \cdot x - 2b \cdot y + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$, a et b étant les coordonnées du centre et remplacer x et y par leurs valeurs en fonction de z et \bar{z} .

Équations complexes des ellipses.

Le plan P est muni d'un deuxième repère orthonormé $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$, le sommet O étant situé sur \overrightarrow{Sx} avec l'abscisse $\overline{SO} = -c$. Par rapport à ce dernier repère, les affixes des points et vecteurs seront notés $w = u + i \cdot v$.

Nous ne considérerons que le cas particulier de l'ellipse (C_T) (cf. **figure 3**) de centre O et dont les axes focal (AA') et non focal (BB') sont portés par \overrightarrow{Ou} et \overrightarrow{Ov} . Le grand axe a pour longueur $AA' = 2a$ et le petit axe $BB' = 2b$. L'un des deux foyers, F , étant situé en S , la distance focale de (C_T) est $SF' = FF' = 2c$ avec $c^2 = a^2 - b^2$.

Son équation par rapport au repère $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$ est de la forme :

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \text{ ou}$$

$$b^2 \cdot u^2 + a^2 \cdot v^2 = a^2 \cdot b^2$$

Par rapport au repère $(\overrightarrow{Sx}, \overrightarrow{Sy})$, sachant que $u = x + c$ et $v = y$, elle s'écrit :

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou encore : $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 + 2b^2 \cdot c \cdot x - b^4 = 0$.

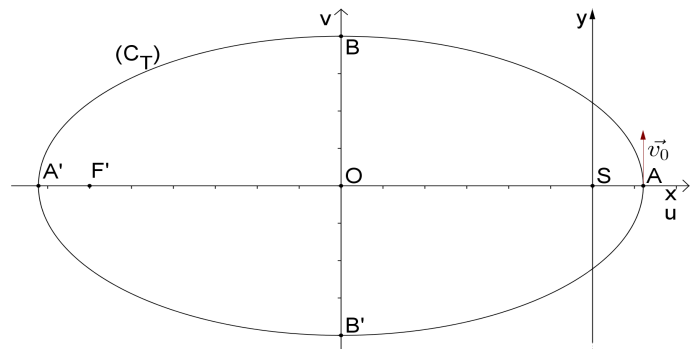


Figure 3. L'ellipse (C_T) et les repères (Ouv) et (Sxy) .

Le remplacement de u et de v puis de x et de y par leurs valeurs en fonction de w et \bar{w} puis z et \bar{z} , nous donne enfin les équations complexes de (C_T) :

dans le repère $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$: $w^2 + \bar{w}^2 - 2 \frac{a^2 + b^2}{c^2} w \cdot \bar{w} + \frac{4a^2 \cdot b^2}{c^2} = 0$ (7-1)

dans le repère $(\overrightarrow{Sx}, \overrightarrow{Sy})$: $z^2 + \bar{z}^2 - 2 \frac{a^2 + b^2}{c^2} z \cdot \bar{z} - \frac{4b^2}{c} (z + \bar{z}) + \frac{4b^4}{c^2} = 0$ (7-2)

4. DE L'HODOGRAPHE À LA TRAJECTOIRE AVEC LA FORMULATION COMPLEXE

➤ L'hodographe

pourquoi, cette partie est présentée en Annexe 1, sa lecture n'étant pas obligatoire pour une bonne compréhension du reste de l'article.

L'équation trouvée à la fin de l'Annexe est identique à (7-2). Elle représente l'ellipse (C_T) de centre O , de foyer S , de distance focale $2c$ et d'axes $2a$ et $2b$.

5. LE MOUVEMENT DE KEPLER du point matériel P_K

Il ne nous paraît pas utile de présenter une nouvelle étude exhaustive du mouvement de Kepler puisque l'on peut retrouver la plupart des résultats le concernant dans l'article de Jean Sivardière [4] « Comparaison entre le mouvement de Kepler et le mouvement elliptique harmonique » qui est l'une des nombreuses publications sur ce sujet. On pourra consulter également, pour la formulation complexe, l'étude [5] de Yves Grandati *et al.*

Nous ne rappellerons que quelques propriétés caractéristiques de ce mouvement.

➤ L'orbite C_T

Nous sommes partis d'une solution géométrique au problème « inverse », dont la première étape a été la construction de l'hodographe circulaire (H). Trois transformations géométriques nous ont ensuite amenés à la trajectoire (C_T).

Les paramètres de (C_T), qui dépendent des conditions initiales à travers la constante C et de l'hodographe avec le rayon R_H et δ , déjà établis [1], sont rappelés ci-après :

les demi-axes a et b et la distance focale c : $a = \frac{C.R_H}{R_H^2 - \delta^2}$ $b = \frac{C}{\sqrt{R_H^2 - \delta^2}}$ $c = \frac{C.\delta}{R_H^2 - \delta^2}$;

l'excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\delta}{R_H}$ et le paramètre : $p = \frac{b^2}{a} = \frac{C}{R_H}$ (12)

➤ L'équation du mouvement

La masse ponctuelle m est soumise à la force newtonienne, centrale et attractive :

$$\vec{F}_K = -k_K \cdot m \frac{\overrightarrow{SP_K}}{\rho^3} \quad \text{avec } SP_K = \rho \quad (13)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors, sous la forme complexe avec (8) :

$$F_K = -k_K \cdot m \frac{z(t)}{|z|^3} = m \cdot a_K(t) = m \cdot \ddot{z}(t) \quad (14)$$

$a_K(t) = \ddot{z}(t)$ étant l'accélération de P_K ou encore la dérivée seconde de z par rapport au temps t .

➤ Les invariants du mouvement

L'énergie. Si nous multiplions les deux membres de l'équation (14) par \dot{z} et les deux membres de son équation conjuguée par $\dot{\bar{z}}$ puis additionnons, nous obtenons la relation :

avec l'**anomalie moyenne** $M(t) = \omega.t$.

La résolution de cette équation [6] donne l'anomalie excentrique en fonction du temps t c'est-à-dire finalement la position de P_K sur son orbite en fonction de t . Nous donnons, **figure 8** de l'Annexe 2, un exemple de progression pour ce mouvement.

L'anomalie excentrique permet d'exprimer simplement le module de l'affixe du point mobile. Conformément à (6) de [4] : $|z| \equiv \rho = a(1 - e \cdot \cos \alpha)$. Or, en dérivant l'équation de

Kepler, on trouve $dt = \frac{1 - e \cdot \cos \alpha}{\omega} d\alpha$ qui est donc aussi égal à :

$$dt = \frac{|z|}{\omega \cdot a} d\alpha \quad (27)$$

expression qui va nous permettre de définir une nouvelle échelle de temps.

6. LA TRANSMUTATION DE LA FORCE

C'est Tristan Needham [7] qui a intitulé le *Corollaire 3* de la *Proposition VII* des *Principia*, démontré géométriquement par Newton, « Transmutation de la force ».

➤ La démarche de Newton [2, 8 et 9]

Après avoir établi la loi des aires, Newton détermine une expression générale de la force centrale qui maintient un corps sur une orbite quelconque (*Proposition VI*) et qu'il utilise dans le *Corollaire 2* de la *Proposition VII* pour exprimer la loi de force qui maintient un corps en orbite circulaire, à partir d'un centre de force quelconque.

C'est ainsi que les deux forces de centres O et S (cf. **figure 5**) qui maintiendraient sur la même orbite circulaire (C), avec la même constante des aires et donc la même période, le corps P , sont respectivement proportionnelles à :

$$F_O \sim \frac{1}{OP^2 \times PT^3} \quad \text{et} \quad F_S \sim \frac{1}{SP^2 \times PV^3}.$$

La parallèle à SP passant par O , coupant en G la tangente à (C) en P et T et V étant les points d'intersection respectivement de OP et SP avec l'orbite, les triangles PTV et OGP sont semblables. On en déduit l'égalité des

rapports : $\frac{PT}{PV} = \frac{OG}{OP}$ et la transmutation $F_S \rightarrow F_O$ s'exprime

par :

$$\frac{\text{nouvelle force}}{\text{ancienne force}} = \frac{F_O}{F_S} = \frac{SP^2 \times PV^3}{OP^2 \times PT^3} = \frac{SP^2 \times PT^3 \times OP^3}{OP^2 \times PT^3 \times OG^3} = \frac{OP \times SP^2}{OG^3} \quad (28)$$

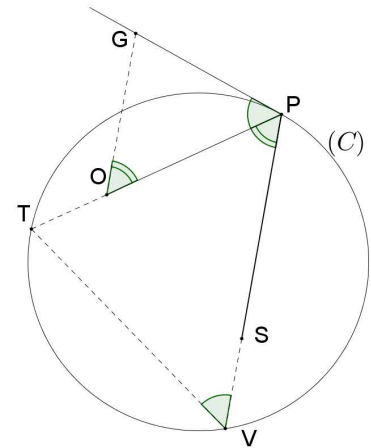


Figure 5. Les deux centres de forces O et S .

$$dt = \frac{\rho}{K} \tau \equiv \frac{|z(t)|}{K} d\tau \quad (33)$$

la constante K restant à déterminer.

$$\text{D'où : } \overrightarrow{F_H} = m \frac{d^2 \overrightarrow{OP}}{d\tau^2} \text{ et avec la notation complexe, } w(\tau) = u(\tau) + i.v(\tau) = r(\tau).e^{i.\delta(\tau)}$$

étant l'affixe de \overrightarrow{OP} dans le plan complexe $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$, la relation fondamentale de la dynamique s'exprime sous la forme :

$$F_H = m.a_H = m.\ddot{w}(\tau) \quad (34)$$

$a_H(\tau) = \ddot{w}(\tau)$ étant l'accélération de P_K ou encore la dérivée seconde de w par rapport au temps τ .

Remarquons de plus, que d'après (32), $w(\tau) = z(t) + c$.

La vitesse de P_H s'écrit alors :

$$v_H(\tau) = \frac{dw(\tau)}{d\tau} = \frac{dw(\tau)}{dt} \times \frac{dt}{d\tau} = \frac{dz(t)}{dt} \times \frac{|z(t)|}{K} = v_K \cdot \frac{|z(t)|}{K} \text{ ou } \dot{w}(\tau) = \dot{z}(t) \cdot \frac{|z(t)|}{K} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{L'accélération } a_H(\tau) &= \frac{d^2 w(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d\dot{w}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\dot{w}(\tau)}{dt} \times \frac{dt}{d\tau} = \frac{d(\dot{z}(t) \cdot \frac{|z(t)|}{K})}{dt} \times \frac{|z(t)|}{K} \\ &= \frac{|z(t)|^2}{K^2} \cdot \ddot{z}(t) + \frac{\dot{z}(t)}{K^2} \cdot |z(t)| \cdot \frac{d|z(t)|}{dt} \end{aligned} \quad \text{et en remplaçant } \ddot{z}(t) \text{ par}$$

son expression (14) $= \frac{|z(t)|^2}{K^2} \times (-k_K \cdot \frac{z(t)}{|z(t)|^3}) + \frac{\dot{z}(t)}{K^2} \cdot |\dot{z}(t)| \cdot |z(t)|$ dont le deuxième terme correspond à une force complémentaire due au fait que le temps utilisé n'est pas absolu.

Il s'ensuit que : $a_H(\tau) = \frac{1}{K^2} (-k_K \frac{z(t)}{|z(t)|} + |z(t)| \cdot \dot{z}(t) \cdot \frac{d|z(t)|}{dt})$ et avec la relation (25) on

parvient à : $a_H(\tau) = \frac{1}{K^2} (-k_K \frac{z(t)}{a} - \frac{A}{m})$.

Si l'on choisit la constante K telle que : $K^2 = \frac{k_K}{\omega^2 \cdot a} = a^2$ et sachant que, suivant (24) :

$$\begin{aligned} A = k_K \cdot m \cdot e \text{ alors } \quad a_H(\tau) &= -\omega^2 (z(t) + e \cdot a) = -\omega^2 (z(t) + c) \quad \text{ou encore} \\ a_H(\tau) &= -\omega^2 \cdot w(\tau) \end{aligned} \quad (36)$$

qui est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de centre O et de constante $k_H = \omega^2$.

Le changement d'échelle de temps : $dt = \frac{|z(t)|}{a} d\tau$ nous a donc permis de confirmer, par le calcul, la démonstration géométrique précédente de la transmutation de la force de Kepler en force de Hooke.

Cette relation privilégiée entre ces deux systèmes ne constitue en fait, qu'un cas particulier de la dualité qui existe entre plusieurs lois de forces centrales proportionnelles à la $n^{\text{ème}}$ puissance de la distance du mobile au centre de force et dont la plupart ont été

8. DE L'ORBITE À L'HODOGRAPHE DU MOUVEMENT DE HOOKE

Nous pourrions bien sûr, établir dès maintenant l'équation de l'hodographe à partir de l'expression de la vitesse (40). Nous resterons cependant dans la logique du parcours annoncé en introduction en considérant les transformations géométriques qui vont nous amener à l'hodographe en passant par la podaire de l'ellipse trajectoire par rapport au centre de forces.

La démonstration [1], rappelée au paragraphe 2 et relative aux transformations géométriques qui nous ont fait passer de l'hodographe à la trajectoire de Kepler est applicable au mouvement à accélération centrale de Hooke. On peut donc considérer dès maintenant que l'hodographe (H_H) se déduit de la trajectoire par le produit de trois transformations géométriques :

- la détermination de la podaire (C_{PH}) de l'orbite par rapport à son centre géométrique où se situe le centre de forces O ;
- l'inversion $\mathcal{I}(O, C)$, de centre O et de puissance C , qui donnera une ellipse (H_H') semblable à l'hodographe mais « tournée de $-\frac{\pi}{2}$ » ;
- une rotation $\mathcal{R}(O, +\frac{\pi}{2})$, de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ radians, qui donnera l'hodographe.

➤ La podaire de l'orbite C_T

L'affixe du point courant de la trajectoire et sa dérivée par rapport à τ sont égales à :

$$w_0 = a \cdot \cos(\omega \cdot \tau) + i \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot \tau)$$

$$w_H = w'_0 = -\omega \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot \tau) + i \cdot \omega \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot \tau). \quad \text{L'affixe } w_P \text{ du point}$$

courant de la podaire est donnée par l'expression que nous établissons en Annexe 3 :

$$w_P = \frac{1}{2} \frac{w_0 \cdot \bar{w}'_0 - w'_0 \cdot \bar{w}_0}{\bar{w}'_0} \quad (47)$$

En remplaçant w_0 , w'_0 , \bar{w}_0 et \bar{w}'_0 par leurs valeurs, on obtient :

$$w_P = \frac{a \cdot b [b \cdot \cos(\omega \cdot \tau) + i \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot \tau)]}{a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot \tau) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot \tau)} \quad (48)$$

Le calcul de l'équation de la podaire qui, à ce stade de notre étude n'est pas indispensable, nous sera d'une certaine utilité, ne serait-ce que pour la représenter graphiquement. En notant D le dénominateur de w_P , on peut écrire les égalités :

$$w_P + \bar{w}_P = \frac{2a \cdot b^2 \cdot \cos(\omega \cdot \tau)}{D} \quad \text{et} \quad w_P - \bar{w}_P = \frac{2i \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot \tau)}{D} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{(w_P + \bar{w}_P)^2}{4a^2 \cdot b^4} = \frac{\cos^2(\omega \cdot \tau)}{D^2} = \frac{1 - \sin^2(\omega \cdot \tau)}{D^2} = \frac{1}{D^2} + \frac{(w_P - \bar{w}_P)^2}{4a^4 \cdot b^2}. \quad \text{Or : } w_P \cdot \bar{w}_P = \frac{a^2 \cdot b^2}{D}.$$

Il en résulte que l'équation de la podaire s'écrit :

- $w_{H'} = \frac{C}{\bar{w}_P}$ ou $\bar{w}_{H'} = \frac{C}{w_P}$ pour l'inversion $\mathcal{I}(O, C)$ et
- $w_H = i.w_{H'}$ ou $\bar{w}_H = -i.\bar{w}_{H'}$ pour la rotation $\mathcal{R}(O, +\frac{\pi}{2})$.

On obtiendra donc l'affixe du point courant de l'hodographe avec la transformation :

$$w_H = i.w_{H'} = \frac{i.C}{w_P} \quad \text{appliquée avec l'expression (48) de } w_P.$$

Le calcul conduit à :

$w_H = w'_0 = -\omega.a.\sin(\omega.\tau) + i.\omega.b.\cos(\omega.\tau)$ qui est bien l'affixe du vecteur vitesse. On peut évidemment déduire de cette expression l'équation de (H_H) . Mais on peut aussi remplacer dans l'équation (49) de la podaire, les w_P et \bar{w}_P par :

$$w_P = \frac{C}{\bar{w}_{H'}} = \frac{-i.C}{\bar{w}_H} \quad \text{et} \quad \bar{w}_P = \frac{C}{w_{H'}} = \frac{i.C}{w_H}. \quad \text{On arrive ainsi à la relation :}$$

$$w^2 + \bar{w}^2 - 2\frac{a^2 + b^2}{c^2} w.\bar{w} + \frac{4C^2}{c^2} \equiv w^2 + \bar{w}^2 - 2\frac{a^2 + b^2}{c^2} w.\bar{w} + \frac{4a^2.b^2.\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{qui est}$$

l'équation d'une ellipse de centre O, d'axes égaux à $\omega.a$ et $\omega.b$ et homothétique de l'ellipse trajectoire (C_T) .

CONCLUSION

Notre parcours entre les hodographes de Kepler et de Hooke nous a permis de confirmer, à de nombreuses reprises, l'intérêt de la notation complexe. Nous avons pu également entrer dans le détail de la transformation du problème de Kepler en problème de Hooke. Même s'il existe d'autres paires de lois de forces duales comme nous l'avons signalé, cette transmutation n'en demeure pas moins assez stupéfiante et mérite l'attention particulière que nous lui avons accordée.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] TERRIEN C., « Newton, Feynman et le problème inverse », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, juin 2014, vol. 108, n° 965, p. 909-930.
- [2] NEWTON I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Trad. La Marquise du Châtelet, Paris : Dunod, 2011.
- [3] LESPINARD V. et PERNET R., *Géométrie Classe de Mathématiques Élémentaires*, Lyon : André Desvigne, 1962.
- [4] SIVARDIÈRE J., « Comparaison entre le mouvement de Képler et le mouvement elliptique harmonique », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, février 1993, vol. 87, n° 751, p. 165-193.
- [5] GRANDATI Y., BÉRARD A. et MOHRBACH H., « Complex representation of planar motions and conserved quantities of the KEPLER and HOOKE problems », *Jour. of Nonli. Math. Phys.*, vol. 17, n° 2 (2010), p. 213-225.
- [6] COLWELL P., « Bessel Functions and Kepler's Equation », *The American Mathematical Monthly*, vol. 99, n°1(Jan., 1992), 45-48.

- [7] NEEDHAM T., « Newton and the Transmutation of Force », *The American Mathematical Monthly*, février 1993, vol. 100, n° 2, p. 119-137.
- [8] CHANDRASEKHAR S., *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford : Clarendon Press, 1995.
- [9] CHAVE T. « Newton : le mouvement circulaire, l'approximation circulaire et la loi de la gravitation », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, juin 2012, vol. 106, n° 945, p. 663-680.
- [10] Wikipédia https://fr.wikipedia.org/wiki/Échelle_de_temps_en_mécanique_classique
- [11] LEVI-CIVITA T. « Sur la résolution qualitative du problème des trois corps », *Acta Mathematica*, 1906, vol. 30, p. 305-327.
- [12] BOHLIN K. « Note sur le problème des deux corps et sur une intégration nouvelle dans le problème des trois corps. », *Bulletin Astronomique*, Paris, 1911, vol. 28, p. 8.
- [13] ARNOL'D V. I., *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Bâle : Birkhäuser Verlag, 1990.
- [14] SIVARDIERE J., *La Symétrie en Mathématiques, Physique et Chimie*, Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble, 1995.
- [15] FRADKIN D.M., « Three-dimensional isotropic harmonic oscillator and SU3 », *Am. J. Phys.*, 1965, vol. 33, p. 207-211.
- [16] SIVARDIERE J., « Laplace vectors for the harmonic oscillator », *Am. J. Phys.*, Juin 1989, vol. 57, n° 6, p. 524-525.
- [17] <http://www.mathcurve.com/courbes2d/podaire/podaire.shtml>

La relation (A7) exprime que le point M , dont l'affixe est fonction de θ , est sur la droite (D_θ) . Avec la formulation classique, en fonction de x_M et y_M , elle s'écrit également :

$$f(x_M, y_M, \theta) = 0 \quad (\text{A8})$$

Les composantes du vecteur \vec{N} , orthogonal à (D_θ) et d'affixe $\beta_N = 1 + i \cdot \text{tg} \theta$, sont aussi égales à f'_{xM} et f'_{yM} . On sait de plus, que les paramètres directeurs de la tangente à (C_T) en M , sont : $\frac{dx_M}{d\theta}$ et $\frac{dy_M}{d\theta}$.

La droite (D_θ) et la tangente en M qui ont en commun ce point M , seront confondues si elles ont la même direction ou encore si : $f'_{xM} \cdot \frac{dx_M}{d\theta} + f'_{yM} \cdot \frac{dy_M}{d\theta} = 0$. Or, la différentielle totale de (A8), par rapport à θ , est égale à : $f'_{xM} \cdot \frac{dx_M}{d\theta} + f'_{yM} \cdot \frac{dy_M}{d\theta} + f'_\theta = 0$. Associée à la relation précédente, on en déduit : $f'_\theta = 0$ (A9)

Les fonctions inconnues z_M sont donc assujetties à vérifier, outre la relation (A6), la condition (A9) qui s'écrit en fonction de z_M : $f'_\theta(z_M, \bar{z}_M, \theta) = 0$.

Le calcul de f'_θ conduit à : $f'_\theta = -i(z_M - \bar{z}_M) \mp \frac{2b^2 \cdot \text{tg} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \text{tg}^2 \theta}} = 0$. On en déduit :

$$z_M - \bar{z}_M = \pm \frac{2i \cdot b^2 \cdot \text{tg} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \text{tg}^2 \theta}} \quad \text{et de (A7) on tire : } z_M + \bar{z}_M = -2c \pm \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \text{tg}^2 \theta}} \quad (\text{A10})$$

L'équation de (C_T) sera obtenue en éliminant $\text{tg} \theta$ de ces dernières relations que l'on peut présenter autrement :

$$\frac{z_M - \bar{z}_M}{2i \cdot b^2 \cdot \text{tg} \theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \text{tg}^2 \theta}} = \frac{z_M + \bar{z}_M + 2c}{2a^2}. \quad \text{En élevant au carré, les 1^{er} et 3^{ème} rapports donnent : } \text{tg}^2 \theta = -\frac{(z_M - \bar{z}_M)^2}{4b^4} \times \frac{4a^4}{(z_M + \bar{z}_M + 2c)^2} \quad \text{et les 2^{ème} et 3^{ème} rapports :}$$

$$a^2(z_M + \bar{z}_M + 2c)^2 + b^2(z_M + \bar{z}_M + 2c)^2 \times \frac{-4a^4(z_M - \bar{z}_M)^2}{4b^4(z_M + \bar{z}_M + 2c)^2} = 4a^4. \quad \text{D'où :}$$

$$(z_M + \bar{z}_M + 2c)^2 - \frac{a^2}{b^2}(z_M - \bar{z}_M)^2 = 4a^2 \quad \text{soit}$$

$$z_M^2 + \bar{z}_M^2 - 2 \frac{a^2 + b^2}{c^2} z_M \cdot \bar{z}_M - \frac{4b^2}{c}(z_M + \bar{z}_M) + \frac{4b^4}{c^2} = 0.$$

On retrouve l'équation (7-2) qui représente l'ellipse (C_T) de centre O , de foyer S , de distance focale $2c$ et d'axes $2a$ et $2b$.

ANNEXE 2

Comparaison de la progression, sur la même ellipse, en fonction des temps t et τ , des points P_K et P_H , animés d'un mouvement, respectivement de Kepler et de Hooke.

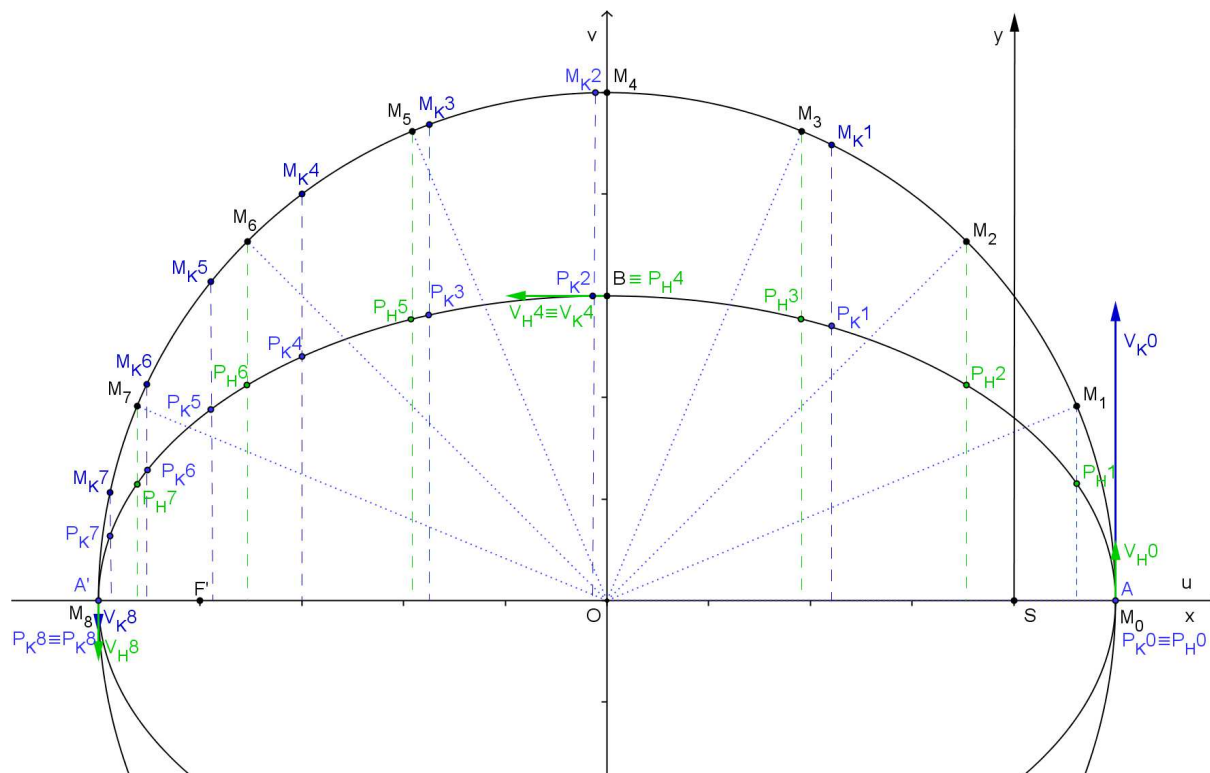


Figure 8. Représentation des points mobiles P_K et P_H sur une même ellipse.

La vitesse angulaire moyenne ω est prise égale à $\pi/8$ rad/s.

Les points $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ correspondent aux anomalies moyennes

$$M_n(t) = (OS, OM_i) = n \cdot \pi/8 \text{ rad.}$$

Pour le mouvement de Kepler, les anomalies excentriques aux temps $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ se calculent [6] par la relation :

$$\alpha_n(t) = M_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} \cdot J_n(n \cdot e) \right] \sin(n \cdot \omega \cdot t), \text{ les } J_n \text{ étant les fonctions de Bessel de}$$

première espèce et d'ordre n . Les points M_{Kn} , d'anomalies excentriques α_n , donnent, en abaissant les perpendiculaires à Ox , les points P_{Kn} (en bleu) correspondants sur la trajectoire.

Pour le mouvement de Hooke, nous savons que les anomalies excentriques (46) sont égales à $\alpha = \omega \tau$ ou encore aux $M_n(t)$. En abaissant des points $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ les perpendiculaires à Ox on obtient les points P_{Hn} (en vert) correspondants sur l'orbite.

P_K et P_H partent de A à $t = 0$. On constate avec $P_{K1}, P_{K2} \dots$ que le mobile de Kepler qui part plus vite que le mobile de Hooke est rattrapé par ce dernier au point A' conformément aux vitesses représentées en A, B et A' .

ANNEXE 3

Calcul de l'affixe du point courant de la podaire de l'orbite par rapport à son centre (cf. **figure 7**).

Le point courant P de l'orbite (C_T) ayant pour affixe : $w = u + i.v$, le vecteur unitaire \vec{t} , tangent à (C_T) en P_H d'affixe $w_0 = u_0 + i.v_0$, a pour coordonnées :

$$\vec{t} = \left(\frac{u'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}}, \frac{v'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}} \right) \quad \text{et l'affixe de ce vecteur s'écrit :}$$

$$\beta_t = \frac{u'_0 + i.v'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}} = \frac{w'_0}{|w'_0|}.$$

L'équation de la tangente (T) en P_H étant, d'après (5) :

$$\bar{\beta}_n \cdot w_0 + \beta_n \bar{w}_0 + 2c = 0 \quad \text{on en déduit } c = -\frac{1}{2}(\bar{\beta}_n \cdot w_0 + \beta_n \bar{w}_0) \quad \text{et l'équation de } (T) :$$

$$\bar{\beta}_n \cdot w + \beta_n \bar{w} - (\bar{\beta}_n \cdot w_0 + \beta_n \bar{w}_0) = 0.$$

Une perpendiculaire à (T) a pour vecteur directeur unitaire :

$$\vec{n} = \left(\frac{-v'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}}, \frac{u'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}} \right) \quad \text{dont l'affixe s'écrit :}$$

$$\beta_n = \frac{-v'_0 + i.u'_0}{\sqrt{u'^2_0 + v'^2_0}} = \frac{i \cdot w'_0}{|w'_0|}.$$

La podaire (C_P) par rapport au point O est le lieu des points P_{OH} , pieds des perpendiculaires menées de O aux tangentes à (C_T). D'où l'équation de OP_{OH} , normale à (T) et notée (N) :

$\bar{\beta}_t \cdot w + \beta_t \bar{w} + 2c = 0$ et comme elle passe par O : $c = 0$. On en déduit pour les points de (N) :

$$\bar{w} = -\frac{\bar{\beta}_t}{\beta_t} w.$$

Il en résulte qu'à l'intersection de (T) et de (N) :

$$\bar{\beta}_n \cdot w_P - \beta_n \frac{\bar{\beta}_t}{\beta_t} w_P - (\bar{\beta}_n \cdot w_0 + \beta_n \bar{w}_0) = 0 \quad \text{d'où l'affixe du point } P_{OH} \text{ de la podaire :}$$

$$w_P = \frac{1}{2} \frac{w_0 \cdot \bar{w}'_0 - w'_0 \cdot \bar{w}_0}{\bar{w}'_0} \quad \text{expression identique à (47).}$$