INTRODUCTION à l'ALGÈBRE TENSORIELLE

PREMIÈRE PARTIE : algèbre tensorielle affine

Cette étude ne prétend pas exposer la théorie des tenseurs dans toute sa généralité. Il s'agit d'une approche générale et simplifiée qui devrait permettre une bonne compréhension de leur utilisation et faciliter ainsi la pratique du calcul tensoriel.

Les définitions et les propriétés des espaces vectoriels, affines et euclidiens, sont supposées connues.

Le domaine de cette étude

Soit E_n un espace vectoriel, de dimension n finie et construit sur le corps R des réels.

Nous supposons, dans cette première partie, que E_n est doté simplement d'une structure **affine**. Il comportera n axes de coordonnées ayant à priori chacun une unité particulière. Les vecteurs étant désignés par des caractères gras et si $(\mathbf{e_i})$, avec $i = 1, 2, \ldots n$, est une base de E_n le vecteur **X**, de coordonnées cartésiennes x^i, s'écrira : $\mathbf{X} = \sum_{i=1 \text{ à } n} x^i.\mathbf{e_i}$.

La longueur absolue du vecteur **X** ne pourra pas être définie puisqu'il n'y aura aucune commune mesure entre les différentes composantes. La distance de deux points ne pourra pas être non plus mesurée. Ce n'est que dans la deuxième partie de cette étude que nous considèrerons des espaces vectoriels **normés** et même plus précisément **euclidiens**.

Convention d'Einstein

Chaque fois que dans un monôme figure une fois en position supérieure et une fois en position inférieure le même indice, on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.

Le vecteur $\mathbf{X} = \sum_{i=1 \text{ à } n} x^i.\mathbf{e_i}$, de coordonnées cartésiennes x^i, s'écrira donc :

$\mathbf{X} = x^i.\mathbf{e}_{i.} \equiv \mathbf{e}_{i}.x^i$. Sous la forme matricielle : $\mathbf{X} = (\mathbf{e_i}).(x^i) = {}^t(x^i).{}^t(\mathbf{e_i})$, $(\mathbf{e_i})$ étant une matrice ligne et (x^i) une matrice colonne.

Quelques rappels sur les changements de bases

Notation : pour une matrice (a_j^i), nous conviendrons que l'indice le plus proche de la lettre, c'est-à-dire j, désigne le rang de la ligne. Il en résulte que les matrices uni-colonnes s'écriront : $(a_{j.})$ ou $(a_j^{\cdot})$ ou $(a^{j\cdot})$… et les matrices uni-lignes : $(a_{.j})$ ou $(a_{.}^{j})$ ou $(a^{\cdot j})$…

La matrice transposée de la matrice $A = (a_j^i)$, obtenue par échange des indices des lignes et des colonnes, sera notée ${}^tA = (a^i{}_j)$. Pour la cohérence de ces notations, on constate alors qu'il faut adopter une autre convention :

${}^t(a_j^i) = (a^i{}_j)$ ou encore $a_j^{\ i} = a^i{}_j$ pour tout couple (i,j), ce qui conserve la position haute ou basse de chaque indice.

Les relations entre les vecteurs de chacune des bases

Soient $(\mathbf{e'_j})$ et $(\mathbf{e_i})$ deux bases arbitraires de E_n. En rapportant les vecteurs de chacune des bases à l'autre base, on obtient successivement :

- pour les $\mathbf{e'_j}$ en fonction des $\mathbf{e_i}$, avec la **matrice de passage** $A = (a^i{}_j)$ dont les éléments sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base sur les vecteurs de l'ancienne base et les matrices uni-lignes $(\mathbf{e'_{.j}})$ et $(\mathbf{e_{.i}})$:

$(\mathbf{e'_{.j}}) = (\mathbf{e_{.i}}).(a^i{}_j) = (\mathbf{e_{.i}}).A$ ou encore : $\mathbf{e'_j} = a^i{}_j\,.\mathbf{e_i} = a_j^{\ i}.\mathbf{e_i}$;

- et en transposant, avec les matrices colonnes $(\mathbf{e'_{j.}})$ et $(\mathbf{e_{i.}})$:

$(\mathbf{e'_{j.}}) = (a_j^i).(\mathbf{e_{i.}}) = {}^tA.(\mathbf{e_{i.}})$ qui peut aussi s'écrire : $\mathbf{e'_j} = a_j^{\ i}.\mathbf{e_i} = a^i{}_j\,.\mathbf{e_i}$;

- enfin, pour les $\mathbf{e_i}$ en fonction des $\mathbf{e'_j}$ avec la matrice $R = (r^j{}_i)$:

$(\mathbf{e_{.i}}) = (\mathbf{e'_{.j}}).(r^j{}_i) = (\mathbf{e'_{.j}}).R$ qui peut aussi s'écrire : $\mathbf{e_i} = r^j{}_i.\mathbf{e'_j} = r_i^{\ j}.\mathbf{e'_j}$.

- Comme précédemment, en transposant :

$(\mathbf{e_{i.}}) = (r_i^j).(\mathbf{e'_{j.}}) = {}^tR.(\mathbf{e'_{j.}})$ qui s'écrit également : $\mathbf{e_i} = r_i^{\ j}.\mathbf{e'_j} = r^j{}_i.\mathbf{e'_j}$.

On démontre que les matrices R et A sont forcément inverses l'une de l'autre et donc que A est une matrice régulière, c'est-à-dire que son déterminant

$\left|a^i{}_j\right|$ est différent de zéro. Nous préciserons ultérieurement les relations entre les $a^i{}_j$ et les $r^j{}_i$.

Les formules de changement de coordonnées

Soit **X** un vecteur arbitraire de E_n de composantes x^i par rapport à la base $(\mathbf{e_i})$ et x'^j par rapport à la base $(\mathbf{e'_j})$.

On a, en utilisant les expressions des $\mathbf{e_i}$ et $\mathbf{e'_j}$:

$$\mathbf{X} = x^i.\mathbf{e_i} = x'^j.\mathbf{e'_j} = x^i.r^j{}_i.\mathbf{e'_j} = x'^j.a^i{}_j.\mathbf{e_i}.$$

Par identification, on obtient les formules de transformation :

$$x^i = a^i{}_j.x'^j \qquad \text{et} \qquad x'^j = r^j{}_i.x^i$$

On remarque que les coefficients des expressions linéaires des composantes x^i et x'^j sont identiques à ceux des expressions des vecteurs de base $\mathbf{e'_j}$ et $\mathbf{e_i}$. On dit que les composantes x^i et x'^j sont **contravariantes** ou encore que le vecteur **X** de l'espace vectoriel E_n est **contravariant**. Les indices de ses composantes sont en position supérieure.

Sous la forme matricielle :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{e_{\cdot i}})(x^{i\cdot}) = (\mathbf{e'_{\cdot j}})(x'^{j\cdot}) = (\mathbf{e'_{\cdot j}}).R.(x^{i\cdot}) = (\mathbf{e_{\cdot i}}).A.(x'^{j\cdot}) \qquad \text{soit :}$$

$$(x^{i\cdot}) = A.(x'^{j}) \qquad \text{et} \qquad (x'^{j\cdot}) = R.(x^{i\cdot})$$

ou, les matrices colonnes $(x^{i\cdot})$ et $(x'^{j\cdot})$ étant notées X et X' :

$$X = A.X' \qquad \text{et} \qquad X' = R.X\ .$$

Il est possible de déduire des formules de changement de coordonnées précédentes les relations entre les éléments a et r des matrices de passage :

$x^i = a^i{}_j.x'^j = a^i{}_j.r^j{}_k.x^k$. Si $k \neq i$, il faut $a^i{}_j.r^j{}_k = 0$ et si $k = i$, il faut $a^i{}_j.r^j{}_k = 1$, c'est-à-dire que $a^i{}_j.r^j{}_k = \delta^i{}_k$, le symbole de Kronecker ; de la même façon :

$x'^j = r^j{}_i.x^i = r^j{}_i.a^i{}_k.x'^k$ qui impose $r^j{}_i.a^i{}_k = \delta^j{}_k$.

Avec les matrices, on retrouve :

$X = A.X' = A.R.X$ ce qui impose : $A.R = I$ la matrice unité, ou :

$X' = R.X = R.A.X'$ qui implique : $R.A = I$.

R étant la matrice inverse de A, sa transposée est la matrice conjuguée de A, notée $\tilde{A}$: ${}^tR = {}^t(A^{-1}) = \tilde{A}$.

En ne considérant que les matrices **colonnes**, les relations entre les vecteurs des bases et les formules de changement de coordonnées peuvent donc s'écrire :

$$\boxed{(\mathbf{e'}_{j.}) = {}^tA.(\mathbf{e}_{i.})} \quad \text{et} \quad \boxed{(\mathbf{e}_{i.}) = \tilde{A}.(\mathbf{e'}_{j.})}$$

$$\boxed{X = A.X'} \quad \text{et} \quad \boxed{X' = A^{-1}.X}\ .$$

Formes linéaires

On appelle **forme linéaire** sur E_n, une application linéaire l de E_n dans R.

A tout vecteur $\mathbf{X} \in E_n$, on fait correspondre le nombre $l(\mathbf{X}) \in$ R tel que :

$$l(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = l(\mathbf{X}) + l(\mathbf{Y}) \quad \text{et}$$
$$l(\alpha.\mathbf{X}) = \alpha.l(\mathbf{X}) \quad \forall\ \alpha \in \mathrm{R}.$$

Espace dual

Dans l'ensemble E_n^* des formes linéaires $l(\mathbf{X}) = x^i.l(\mathbf{e}_\mathbf{i})$, adoptons les deux lois de composition suivantes :

$$l_1(\mathbf{X}) + l_2(\mathbf{X}) = x^i\ [\ l_1(\mathbf{e}_\mathbf{i}) + l_2(\mathbf{e}_\mathbf{i})\ ] = x^i.l_s(\mathbf{e}_\mathbf{i}) = l_s(\mathbf{X}) \quad \text{et}$$

$$\alpha.l(\mathbf{X}) = x^i\ [\ \alpha.l(\mathbf{e}_\mathbf{i})\ ] = x^i.l_p(\mathbf{e}_\mathbf{i}) = l_p(\mathbf{X}).$$

E_n^* constitue alors un espace vectoriel appelé **espace dual** de E_n.

Considérons les n formes linéaires qui, dans la base choisie, ont pour valeur :

$$l^i(\mathbf{X}) = x^i.$$

En notant: $l(\mathbf{e}_\mathbf{i}) = x_i$ la forme linéaire s'écrit $l(\mathbf{X}) = x_i.l^i(\mathbf{X})$.

Cette relation est valable $\forall$ **X** ; on en déduit que toute forme linéaire peut, d'une manière et d'une seule, être mise sous la forme d'une combinaison linéaire des n formes l^i.

Autrement dit, le système des n formes l^i linéairement indépendantes, constitue une base de E_n^*, qui a la dimension n et que nous noterons $(\mathbf{e}^{*\mathbf{i}})$ ou plus simplement $(\mathbf{e}^{\mathbf{i}})$.

Cette base est dite **duale** de la base $(\mathbf{e}_\mathbf{i})$. Les vecteurs de E_n^* s'écrivent donc :

$$\mathbf{l} = \mathbf{X}^* = x_i.\mathbf{e}^\mathbf{i}.$$

Sous la forme matricielle : $\mathbf{l} = \mathbf{X}^* = (x_{.i}).(\mathbf{e}^{\mathbf{i}.})$,

$(x_{.i})$ étant une matrice ligne et $(\mathbf{e}^{\mathbf{i}.})$ une matrice colonne.

Remarque : il convient de bien distinguer $l(\mathbf{X})$ qui est un nombre réel, de **l** qui est un vecteur, élément de E_n^*.

Changements de bases et espace dual

À toute base $(\mathbf{e}_\mathbf{i})$ de E_n, nous avons fait correspondre d'une manière canonique une base duale $(\mathbf{e}^\mathbf{i})$.

Si l'on effectue sur E_n le changement de base étudié plus haut :

$$\mathbf{e'_j} = a^i{}_j.\mathbf{e_i} \quad \text{ou} \quad \mathbf{e_k} = r^j{}_k.\mathbf{e'_j} \qquad \text{avec } a^i{}_j.r^j{}_k = \delta^i{}_k,$$

on effectue simultanément sur E_n* le changement de base défini par les formules de changement des composantes de **X** :

$$l'^j(\mathbf{X}) = x'^j = r^j{}_i.x^i \equiv r^j{}_i.l^i \qquad \text{et}$$
$$l^i(\mathbf{X}) = x^i = a^i{}_j.x'^j \equiv a^i{}_j.l'^j$$

ou encore, les vecteurs de base $\mathbf{e}^\mathbf{i}$ se transforment selon les relations :

$$\mathbf{e}'^{\mathrm{j}} = r^j{}_i.\mathbf{e}^{\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e}^{\mathrm{i}} = a^i{}_j.\mathbf{e}'^{\mathrm{j}}.$$

Dans ce changement de base, les composantes de la forme l se transforment selon les formules :

$x'_j = l(\mathbf{e'_j}) = l(a^i{}_j.\mathbf{e_i}) = a^i{}_j.l(\mathbf{e_i}) = a^i{}_j.x_i$ ou
$x_i = l(\mathbf{e_i}) = l(r^j{}_i.\mathbf{e'_j}) = r^j{}_i.l(\mathbf{e'_j}) = r^j{}_i.x'_j$.

Elles se transforment donc comme les bases de E_n.

On remarque que les coefficients des expressions linéaires des composantes x_i et x'_j sont identiques à ceux des expressions des vecteurs de base $\mathbf{e^i}$ et $\mathbf{e'^j}$. On dit que les composantes x_i et x'_j sont **covariantes** ou encore que le vecteur **X*** de l'espace dual $E_n{}^*$ est **covariant**. Les indices de ses composantes sont en position inférieure.

En ne considérant que les matrices **colonnes**, sous la forme matricielle, les relations précédentes s'écrivent :

$\boxed{(\mathbf{e'^{j.}}) = A^{-1}.(\mathbf{e^{i.}})}$ et $\boxed{(\mathbf{e^{i.}}) = A.(\mathbf{e'^{j.}})}$;

$(x'_{j.}) = {}^tA.l(\mathbf{e_{i.}}) = {}^tA.(x_{i.})$ et $(x_{i.}) = \tilde{A}.l(\mathbf{e'_{j.}}) = \tilde{A}.(x'_{j.})$,

ou, les matrices colonnes $(x'_{j.})$ et $(x_{i.})$ des composantes des vecteurs de l'espace dual étant notées $X^{*\prime}$ et X^* :

$\boxed{X^{*\prime} = {}^tA.X^*}$ et $\boxed{X^* = \tilde{A}.X^{*\prime}}$.

Interprétation de $\tilde{A}$. En transposant la relation entre $(\mathbf{e'^{j.}})$ et $(\mathbf{e^{i.}})$ on obtient la relation entre les matrices ligne $(\mathbf{e'^{.j}})$ et $(\mathbf{e^{.i}})$:

$$(\mathbf{e'^{.j}}) = (\mathbf{e^{.i}}).{}^t(A^{-1}) = (\mathbf{e^{.i}}).(\tilde{A}).$$

La matrice $\tilde{A}$, conjuguée de A, exprime la base conjuguée de la deuxième base en fonction de la base conjuguée de la première base, ce qui est conforme à la relation entre X^* et $X^{*\prime}$.

Tableau récapitulatif des formules de changement des bases et des coordonnées

$(\mathbf{e'_{j.}}) = {}^tA.(\mathbf{e_{i.}})$	$(\mathbf{e_{i.}}) = \tilde{A}.(\mathbf{e'_{j.}})$
$X' = A^{-1}.X$	$X = A.X'$

$$(\mathbf{e}'^{j\cdot}) = A^{-1}.(\mathbf{e}^{i\cdot}) \qquad\qquad (\mathbf{e}^{i\cdot}) = A.(\mathbf{e}'^{j\cdot})$$

$$X^{*}{}' = {}^{t}A.X^{*} \qquad\qquad X^{*} = \tilde{A}.X^{*}{}'$$

Bidualité

Si l'on considère le dual E_n^{**} de E_n^{*}, les formules de changement de base deviennent :

$$\mathbf{e}^{**}{}'_{\mathbf{j}} = a^i_j\,.\mathbf{e}^{**}_{\mathbf{i}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e}^{**}_{\mathbf{i}} = r^j_i.\mathbf{e}^{**}{}'_{\mathbf{j}}\,,$$

les mêmes que celles que l'on a établies pour E_n. Ce qui nous amène à confondre les espaces E^{**}_n et E_n.

Formes bilinéaires

On appelle **forme bilinéaire** sur l'ensemble produit $E_n \times E_n$ ou carré de E_n, une application bilinéaire de E_n^2 dans R.

À tout couple ordonné de deux vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y} \in E_n$, on fait correspondre le nombre $b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in$ R, tel que :

* $b(\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2},\mathbf{Y}) = b(\mathbf{X_1},\mathbf{Y}) + b(\mathbf{X_2},\mathbf{Y})$ et
* $b(\alpha.\mathbf{X}) = \alpha.b(\mathbf{X}) \quad \forall\, \alpha \in$ R.

b est, de la même façon, linéaire par rapport à $\mathbf{Y}$.
$b(\mathbf{X},\mathbf{X})$ et $b(\mathbf{Y},\mathbf{Y})$ sont des formes quadratiques sur E_n.

Représentation de la forme bilinéaire

Soient x^i et y^j les composantes des vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ par rapport à la base $(\mathbf{e_i})$. $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ s'écrivent :

$$\mathbf{X} = x^i.\mathbf{e_i} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = y^j.\mathbf{e_j}.$$

Il résulte alors des propriétés de linéarité que :

$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = x^i.y^j.b(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j})$. $\qquad$ $b(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j})$ étant noté t_{ij}, il vient :

$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = t_{ij}.x^i.y^j$.

- En représentation matricielle, la forme bilinéaire s'écrit :

$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = {}^tX.T_{ijCa}.Y$, les X et Y étant les matrices colonnes des coordonnées de **X** et **Y** et T_{ijCa} la matrice carrée n × n des éléments t_{ij}.

L'espace des formes bilinéaires

On définit très facilement la somme de deux formes bilinéaires b_1 et b_2 : c'est la fonction qui, à tout couple de vecteurs **X** et **Y**, associe le nombre

$$s(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = b_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + b_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

De même, le produit d'une forme bilinéaire b par un nombre réel α est la fonction qui, à tout couple de vecteurs **X**, **Y**, associe le nombre $\alpha.b(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Avec ces opérations, on donne ainsi à l'ensemble des formes bilinéaires sur $E_n\times E_n$ une structure d'espace vectoriel que l'on appelle **produit tensoriel** de $E_n{}^*$ par lui-même et que l'on note $E_n{}^*\otimes E_n{}^*$.

En partant de $E_n{}^*$, on définit de la même façon le produit tensoriel $E_n\otimes E_n$.

Considérons les n^2 formes bilinéaires qui, dans la base choisie sur E_n , ont pour valeur :

$b^{ij}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = x^i.y^j$.   La forme b s'écrit alors :

$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = t_{ij}.x^i.y^j = t_{ij}.b^{ij}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.   Cette relation étant valable $\forall$ **X** et **Y**,

$$b = t_{ij}.b^{ij}.$$

Toute forme bilinéaire peut, d'une manière et d'une seule, être mise sous la forme d'une combinaison linéaire des n^2 formes b^{ij}. Autrement dit, le système des b^{ij} constitue une base, notée (b^{ij}) ou $(\mathbf{b^{ij}})$, de $E_n{}^*\otimes E_n{}^*$. C'est la base associée à la base choisie dans E_n. Les t_{ij} sont les n^2 composantes de la forme bilinéaire.

Remarque : il convient de bien distinguer $b(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ qui est un nombre réel, de **b** qui est un élément de l'espace produit tensoriel $E_n^{*}\otimes E_n^{*}$, de composantes t_{ij} sur la base $(\mathbf{b}^{\mathbf{ij}})$ et qui s'écrit $\mathbf{b} = t_{ij}.\mathbf{b}^{\mathbf{ij}}$.

Récapitulatif relatif à E_n* et $E_n^{*}\otimes E_n^{*}$

Avant d'aborder la définition des tenseurs, il paraît utile de revenir sur la double signification de chacun des deux ensembles E_n* et $E_n^{*}\otimes E_n^{*}$.

L'espace dual E_n* de E_n :

➢ c'est l'ensemble des **formes linéaires** sur E_n : $l(\mathbf{X}) = x^i.l(\mathbf{e_i})$. Ces formes peuvent également s'écrire, avec dans la base choisie $(\mathbf{e_i})$ de E_n, $l^i(\mathbf{X}) = x^i$ et $l(\mathbf{e_i}) = x_i$: $l(\mathbf{X}) = x_i.l^i(\mathbf{X})$.
Cet ensemble est doté d'une structure d'espace vectoriel, le système des n formes l^i linéairement indépendantes, constituant une base (l^i) ;

➢ mais c'est aussi l'ensemble des **vecteurs covariants l** ou **X*** attachés aux formes $l(\mathbf{X})$. Le système des n vecteurs $\mathbf{l^i} \equiv \mathbf{e^i}$, attachés aux formes l^i constituant une base $(\mathbf{e^i})$ de E_n* et les x_i étant les composantes du vecteur **X*** par rapport à cette base, les **X*** s'écrivent : $\mathbf{l} = \mathbf{X}^* = (x_{.i}).(\mathbf{e}^{\mathbf{i}.})$.

Attention : $l(\mathbf{X})$ est un nombre et **l** est un vecteur de E_n*.

L'espace produit tensoriel $E_n^{*}\otimes E_n^{*}$:

➢ c'est l'ensemble des **formes bilinéaires** sur $E_n\times E_n$ doté d'une structure d'espace vectoriel. Ces formes bilinéaires $b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = x^i.y^j.b(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j})$ peuvent également s'écrire, avec dans la base choisie $(\mathbf{e_i})$ de E_n, $b(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j}) = t_{ij}$ et $b^{ij}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = x^i.y^j$: $b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = t_{ij}.b^{ij}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, le système des n^2 formes b_{ij} linéairement indépendantes, constituant une base (b_{ij}) ;

➢ mais c'est aussi l'ensemble des **vecteurs b**, attachés aux formes bilinéaires $b(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ et qui s'écrivent : $\mathbf{b} = t_{ij}.\mathbf{b}^{\mathbf{ij}}$, les t_{ij} étant les composantes de **b** par rapport à la base $(\mathbf{b}^{\mathbf{ij}})$ et le système des n^2 vecteurs $\mathbf{b}^{\mathbf{ij}}$, attachés aux formes b^{ij}, constituant une base.

Attention : $b(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ est un nombre réel et **b** est un vecteur de $E_n^{*}\otimes E_n^{*}$.

Tenseurs du second ordre deux fois covariants

Les formes bilinéaires que nous venons de définir sont appelées **tenseurs du second ordre deux fois covariants**. Ces tenseurs appartiennent à l'espace produit tensoriel $E_n^* \otimes E_n^*$.

Nous savons que la valeur de la forme bilinéaire b en un point $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ de $E_n \times E_n$ est égale à $b\,(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = t_{ij}.b^{ij}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Les coefficients t_{ij} de la forme b s'appellent **composantes du tenseur** dans la base choisie.

Cas particulier : produit tensoriel de deux vecteurs covariants

Considérons deux formes linéaires (ou vecteurs covariants) définies par :

$$\mathbf{X}^* \equiv \mathbf{l_1} = x_i.\mathbf{l_1}^{\mathbf{i}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Y}^* \equiv \mathbf{l_2} = y_j.\mathbf{l_2}^{\mathbf{j}}.$$

En $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ de E_n^2 : $l_1(\mathbf{X}) = x_i.l_1^i(\mathbf{X})$ et $l_2(\mathbf{Y}) = y_j.l_2^j(\mathbf{Y})$.

Le produit :

$$l_1(\mathbf{X}).l_2(\mathbf{Y}) = x_i.y_j.l_1^i(\mathbf{X}).l_2^j(\mathbf{Y})$$

définit une forme bilinéaire, c'est-à-dire un tenseur produit tensoriel des deux vecteurs covariants $\mathbf{l_1}$ et $\mathbf{l_2}$.

Ce tenseur s'écrit :

$$\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{Y}^* \equiv \mathbf{l_1} \otimes \mathbf{l_2} = x_i.y_j.\mathbf{l_1}^{\mathbf{i}} \otimes \mathbf{l_2}^{\mathbf{j}}.$$

Les n^2 produits tensoriels $\mathbf{l_1}^{\mathbf{i}} \otimes \mathbf{l_2}^{\mathbf{j}}$ sont les éléments de la base dans $E_n^* \otimes E_n^*$. Les composantes de $\mathbf{l_1} \otimes \mathbf{l_2}$ sont les n^2 nombres $x_i.y_j$.

Inversement, tous les éléments de $E_n^* \otimes E_n^*$ ne sont pas forcément les produits tensoriels de deux vecteurs covariants.

Remarque : il faut à nouveau insister sur la signification de $l_1\, l_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = l_1(\mathbf{X}).l_2(\mathbf{Y})$ qui est un nombre réel et sur celle de $\mathbf{l_1} \otimes \mathbf{l_2}$ qui est un tenseur, élément de $E_n^* \otimes E_n^*$ et produit tensoriel de $\mathbf{l_1}$ par $\mathbf{l_2}$.

Propriétés du produit tensoriel

Les propriétés des formes linéaires confèrent au produit tensoriel les deux propriétés de :

distributivité par rapport aux additions vectorielles :

$$\mathbf{X}^*\otimes(\mathbf{Y}^*_1 + \mathbf{Y}^*_2) = \mathbf{X}^*\otimes\mathbf{Y}^*_1 + \mathbf{X}^*\otimes\mathbf{Y}^*_2$$
$$(\mathbf{X}^*_1 + \mathbf{X}^*_2)\otimes\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*_1\otimes\mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^*_2\otimes\mathbf{Y}^* \qquad \text{et}$$

associativité relative à la loi externe :

$$\alpha.\mathbf{X}^*\otimes\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*\otimes\alpha.\mathbf{Y}^* = \alpha.(\mathbf{X}^*\otimes\mathbf{Y}^*) \quad \forall\ \mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^* \in E_n^* \text{ et } \alpha \in \mathrm{R}.$$

Nous venons de voir également que les $\mathbf{l}_1^{\mathbf{i}}$ et $\mathbf{l}_2^{\mathbf{j}}$ étant les vecteurs de deux bases quelconques de E_n*, les n^2 produits tensoriels $\mathbf{l}_1^{\mathbf{i}}\otimes\mathbf{l}_2^{\mathbf{j}}$ sont les éléments de la base dans $E_n^*\otimes E_n^*$.

Nous retrouvons là les trois propriétés utilisées par certains auteurs pour introduire et définir le produit tensoriel.

Tenseurs deux fois covariants et changements de bases

A la suite du changement de base dans E_n : $(\mathbf{e}_\mathbf{i}) \rightarrow (\mathbf{e'}_\mathbf{j})$, en tout point $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ de E_n^2, on doit avoir l'égalité numérique :

$$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = t_{ij}.x^i.y^j = t'_{ij}.x'^i.y'^j. \qquad \text{Or :}$$

$$x^i = a^i{}_k.x'^k \quad et \quad y^j = a^j{}_k.y'^k\ . \qquad \text{D'où :}$$

$$t_{ij}.a^i{}_k.x'^k.a^j{}_l.y'^l = t'_{kl}.x'^k.y'^l \qquad \text{et} \qquad t'_{kl} = a^i{}_k.a^j{}_l.t_{ij}.$$

Inversement :

$$t_{ij} = r^k{}_i.r^l{}_j.t'_{kl}.$$

➢ **En représentation matricielle**, sachant que

$X = A.X'$, $Y = A.Y'$, $X' = R.X$ et $Y' = R.Y$,

$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = {}^tX.T_{ijCa}.Y = {}^tX'.{}^tA.T_{ijCa}.A.Y' =$

$b(\mathbf{X'},\mathbf{Y'}) = {}^tX'.T_{ij}'_{Ca}.Y' = {}^tX.{}^tR.T_{ij}'_{Ca}.R.Y,$

d'où l'on tire :

$$T_{ij}'_{Ca} = {}^tA.T_{ijCa}.A \qquad \text{et} \qquad T_{ijCa} = {}^tR.T_{ij}'_{Ca}.R \equiv \tilde{A}.T_{ij}'_{Ca}.A^{-1}.$$

Ce genre de formules de changements de coordonnées avec les matrices carrées de dimensions n×n telles que T_{ijCa}, ne concerne que les tenseurs du deuxième ordre dont les composantes t_{ij} (puis t_i^j ou t^{ij} que nous rencontrerons plus loin) peuvent être regroupées dans un tableau ordonné de n lignes et n colonnes.

- **Avec le produit de KRÖNECKER ou tensoriel de deux matrices**.

$A = (a^i_k)$ étant la matrice de passage d'une base à une autre dans l'espace vectoriel E_n , le produit tensoriel de deux matrices identiques à A que l'on note $A \otimes A$, est une matrice carrée à n lignes et n colonnes construite de la manière suivante :

$$A \otimes A = \begin{pmatrix} a^1{}_1 \times (a^j{}_l) & \cdots & a^1{}_n \times (a^j{}_l) \\ \vdots & a^i{}_k \times (a^j{}_l) & \vdots \\ a^n{}_1 \times (a^j{}_l) & \cdots & a^n{}_n \times (a^j{}_l) \end{pmatrix}.$$

On multiplie chacun des éléments a^j_l de la deuxième matrice par chacun des éléments a^i_k de la première matrice. Ce produit de KRÖNECKER peut s'écrire :

$$A \otimes A = (a^i_k\, a^j_l) = (c^{ij}_{kl}) \qquad \text{avec : } c^{ij}_{kl} = a^i_k.a^j_l.$$

Ses éléments sont égaux aux coefficients des formules de changements de coordonnées établies précédemment : $t'_{kl} = a^i_k.a^j_l.t_{ij}$.

La matrice $A \otimes A$ permet donc d'exprimer, lors d'un changement de base dans E_n, les nouveaux coefficients d'une forme bilinéaire en fonction des anciens.

De la même façon, R étant la matrice inverse de A, le produit tensoriel $R \otimes R$ peut s'écrire :

$$R \otimes R = (r^k_i.r^l_j) = (d^{kl}_{ij}) \qquad \text{avec : } d^{kl}_{ij} = r^k_i.r^l_j.$$

On constate ainsi que la matrice $R \otimes R \equiv A^{-1} \otimes A^{-1}$ permet d'exprimer, lors d'un changement de base dans E_n, les anciens coefficients d'une forme bilinéaire en fonction des nouveaux, puisque : $t_{ij} = r^k_i.r^l_j.t'_{kl}$.

Mais pour écrire simplement les formules de changements de coordonnées avec les produits de KRÖNECKER, il nous faut considérer la forme bilinéaire, non pas sous la forme d'un tenseur de l'espace $E_n \times E_n$ représenté par un tableau carré tel que T_{ij} défini précédemment, mais sous la forme d'un être géométrique de l'espace E_n et à n^2 composantes obéissant aux formules de transformation que l'on vient juste de rappeler et représenté par une matrice ligne $\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijL}}$ ou colonne $\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijC}}$.

➢ Pour illustrer facilement notre démarche, nous nous placerons dans un espace à trois dimensions E_3. Les matrices A et $A\otimes A$ s'écrivent alors :

$$(a^j{}_l) = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\otimes A = \begin{pmatrix} a^1{}_1.(a^j{}_l) & a^1{}_2.(a^j{}_l) & a^1{}_3.(a^j{}_l) \\ a^2{}_1.(a^j{}_l) & a^2{}_2.(a^j{}_l) & a^2{}_3.(a^j{}_l) \\ a^3{}_1.(a^j{}_l) & a^3{}_2.(a^j{}_l) & a^3{}_3.(a^j{}_l) \end{pmatrix} \quad \text{ou plus}$$

précisément :

$$A\otimes A = \begin{pmatrix} a^1{}_1.a^1{}_1 & a^1{}_1.a^1{}_2 & a^1{}_1.a^1{}_3 & a^1{}_2.a^1{}_1 & a^1{}_2.a^1{}_2 & \ldots & a^1{}_3.a^1{}_2 & a^1{}_3.a^1{}_3 \\ a^1{}_1.a^2{}_1 & a^1{}_1.a^2{}_2 & a^1{}_1.a^2{}_3 & a^1{}_2.a^2{}_1 & a^1{}_2.a^2{}_2 & \ldots & a^1{}_3.a^2{}_2 & a^1{}_3.a^2{}_3 \\ \vdots & & & & & & & \\ a^3{}_1.a^3{}_1 & a^3{}_1.a^3{}_2 & a^3{}_1.a^3{}_3 & a^3{}_2.a^3{}_1 & a^3{}_2.a^3{}_2 & \ldots & a^3{}_3.a^3{}_2 & a^3{}_3.a^3{}_3 \end{pmatrix}.$$

Une forme bilinéaire à 3^3 composantes dans E_3, peut être représentée par exemple, par la matrice ligne $\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijL}}$: $(t_{11}\ t_{12}\ t_{13}\ t_{21}\ t_{22}\ t_{23}\ t_{31}\ t_{32}\ t_{33})$.

Le produit (de la forme « licol ») des deux matrices $\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijL}}$ et $A\otimes A$ donne, de toute évidence, la matrice ligne $\mathcal{T}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{'}_{\boldsymbol{L}}$ dont les éléments sont les composantes de la forme bilinéaire par rapport à la nouvelle base :

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{'}_{\boldsymbol{L}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{ijL}}.A\otimes A.$$

En transposant et en admettant que ${}^t(A\otimes A) = {}^tA\otimes{}^tA$, on obtient la même relation entre les matrices colonnes représentant la forme bilinéaire :

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{'}_{\boldsymbol{C}} = {}^tA\otimes{}^tA.\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijC}}.$$

Enfin, les formules analogues exprimant les anciennes composantes en fonction des nouvelles s'écrivent :

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{ijC}} = \tilde{A}\otimes\tilde{A}.\mathcal{T}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{'}_{\boldsymbol{C}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_{\boldsymbol{ijL}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{'}_{\boldsymbol{L}}.A^{-1}\otimes A^{-1}.$$

➢ Les relations précédentes entre les composantes de la forme bilinéaire dans les ancienne et nouvelle bases sont valables, bien sûr, pour les valeurs de n>3. Il est donc possible d'afficher le :

Tableau récapitulatif pour les tenseurs deux fois covariants

$T_{ij}{'}_{Ca} = {}^tA.T_{ijCa}.A$	$T_{ijCa} = \tilde{A}.T_{ij}{'}_{Ca}.A^{-1}$
$\mathcal{T}_{\mathbf{ij}}\mathbf{'}_{\mathbf{L}} = \mathcal{T}_{\mathbf{ijL}}.A\otimes A$	$\mathcal{T}_{\mathbf{ij}}\mathbf{'}_{\mathbf{C}} = {}^tA\otimes{}^tA.\mathcal{T}_{\mathbf{ijC}}$
$\mathcal{T}_{\mathbf{ijL}} = \mathcal{T}_{\mathbf{ij}}\mathbf{'}_{\mathbf{L}}.A^{-1}\otimes A^{-1}$	$\mathcal{T}_{\mathbf{ijC}} = \tilde{A}\otimes\tilde{A}.\mathcal{T}_{\mathbf{ij}}\mathbf{'}_{\mathbf{C}}$

Tenseurs du second ordre deux fois contravariants

À tout couple de vecteurs de l'espace dual E_n*, $\mathbf{X^*} = x_i.\mathbf{e^i}$ et $\mathbf{Y^*} = y_j.\mathbf{e^j}$ par exemple, on peut associer une forme bilinéaire sur $E_n^* \times E_n^*$:

$$b(\mathbf{X^*},\mathbf{Y^*}) = x_i.y_j.b(\mathbf{e^i},\mathbf{e^j}) = t^{ij}.x_i.y_j.$$

Cette forme définit un **tenseur du second ordre contravariant** qui appartient à l'espace produit tensoriel $E_n \otimes E_n$.

Les formules de changements de composantes sont immédiates :

$$t'^{kl} = r^k{}_i.r^l{}_j.t^{ij} \qquad \text{ou} \qquad t^{ij} = a^i{}_k.a^j{}_l.t'^{kl}.$$

➢ **En représentation matricielle**, sachant que

$X^* = \tilde{A}.X^{*'}$, $Y^* = \tilde{A}.Y^{*'}$, $X^{*'} = {}^tA.X^*$ et $Y^{*'} = {}^tA.Y^*$, les matrices X^*, $X^{*'}$, Y^* et $Y^{*'}$ étant les matrices **colonnes** des composantes des vecteurs **X*** et **Y***,

$$b(\mathbf{X^*},\mathbf{Y^*}) = {}^tX^*.T^{\mathbf{ij}}{}_{Ca}.Y^* = {}^tX^{*'}.A^{-1}.T^{\mathbf{ij}}{}_{Ca}.\tilde{A}.Y^{*'} =$$

$$b(\mathbf{X^{*'}},\mathbf{Y^{*'}}) = {}^tX^{*'}.T^{\mathbf{ij}}{}'_{Ca}.Y^{*'} = {}^tX^*.A.T^{\mathbf{ij}}{}'_{Ca}.{}^tA.Y^*,$$

avec $T^{\mathbf{ij}}{}_{Ca}$ et $T^{\mathbf{ij}}{}'_{Ca}$ les tableaux carrés des composantes de la forme bilinéaire.

D'où l'on tire :

$$T^{\mathbf{ij}}{}'_{Ca} = A^{-1}.T^{\mathbf{ij}}{}_{Ca}.\tilde{A} \qquad \text{et} \qquad T^{\mathbf{ij}}{}_{Ca} = A.T^{\mathbf{ij}}{}'_{Ca}.{}^tA,$$

formules utilisables uniquement avec les représentations carrées des tenseurs du 2ème ordre.

➢ Comme pour les tenseurs deux fois covariants, nous pouvons exploiter les propriétés du produit de KRÖNECKER. C'est ainsi que les éléments de la matrice $A\otimes A$ sont égaux aux coefficients des formules qui expriment les anciennes composantes de la forme bilinéaire en fonction des nouvelles. D'où, les relations entre les matrices colonnes $\mathcal{T}^{ij}{}_C$ et $\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_C$ représentant le tenseur deux fois contravariant :

$$\mathcal{T}^{ij}{}_C = A\otimes A.\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_C.$$

On obtient, en transposant, une relation analogue entre les matrices lignes :

$$\mathcal{T}^{ij}{}_L = \mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_L.{}^tA\otimes{}^tA.$$

On montrerait de même, que :

$$\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_C = A^{-1}\otimes A^{-1}.\mathcal{T}^{ij}{}_C \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_L = \mathcal{T}^{ij}{}_L.\tilde{A}\otimes\tilde{A}.$$

D'où, le :

Tableau récapitulatif pour les tenseurs deux fois contravariants

$T^{ij\,\prime}{}_{Ca} = A^{-1}.T^{ij}{}_{Ca}.\tilde{A}$	$T^{ij}{}_{Ca} = A.T^{ij\,\prime}{}_{Ca}.{}^tA$
$\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_L = \mathcal{T}^{ij}{}_L.\tilde{A}\otimes\tilde{A}$	$\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_C = A^{-1}\otimes A^{-1}.\mathcal{T}^{ij}{}_C$
$\mathcal{T}^{ij}{}_L = \mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_L.{}^tA\otimes{}^tA$	$\mathcal{T}^{ij}{}_C = A\otimes A.\mathcal{T}^{ij\,\prime}{}_C$

Tenseurs mixtes du second ordre

De la même façon, à tout couple de vecteurs $\mathbf{X}\in E_n$ et $\mathbf{Y}^*\in E_n{}^*$ on peut associer une forme bilinéaire sur $E_n\times E_n{}^*$:

$$b\,(\mathbf{X},\mathbf{Y^*}) = x^i.y_j.b\,(\mathbf{e_i},\mathbf{e^j}) = t_i{}^j.x^i.y_j,$$

élément d'un espace vectoriel, $E_n{}^*\otimes E_n$, à n^2 dimensions. Elle définit un **tenseur mixte du second ordre**.

Les formules de changements de composantes sont les suivantes :

$$t'_k{}^l = a^i{}_k.r^l{}_j.t_i^j \qquad \text{ou} \qquad t_i^j = r^k{}_i.a^j{}_l.t'_k{}^l.$$

➢ Le tableau carré n×n représentant ce tenseur mixte (t_i^j) sera noté $T_i^j{}_{Ca}$. On démontre, de la même façon que pour les tenseurs deux fois covariants et contravariants, les formules suivantes :

$$T_i^j{}'_{Ca} = {}^tA.T_i^j{}_{Ca}.\tilde{A} \qquad \text{et} \qquad T_i^j{}_{Ca} = \tilde{A}.T_i^j{}'_{Ca}.{}^tA \quad \text{ou encore,}$$

entre les matrices colonnes :

$$\mathcal{T}_i^j{}'_C = {}^tA\otimes A^{-1}.\mathcal{T}_i^j{}_C \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_i^j{}_C = \tilde{A}\otimes A.\mathcal{T}_i^j{}'_C,$$

les relations entre les matrices lignes s'en déduisant immédiatement en transposant.

➢ Mais on peut aussi considérer la forme bilinéaire sur $E_n^*\times E_n$ associée au couple de vecteurs $\mathbf{X^*}\in E_n^*$ et $\mathbf{Y}\in E_n$:

$$b\,(\mathbf{X^*},\mathbf{Y}) = x_i.y^j.b\,(\mathbf{e^i},\mathbf{e_j}) = t^i{}_j.x_i.y^j,$$

élément d'un espace vectoriel, $E_n\otimes E_n^*$, à n^2 dimensions. Elle définit elle aussi un nouveau **tenseur mixte du second ordre**.

Les formules de changements de composantes sont les suivantes :

$$t'^k{}_l = r^k{}_i.a^j{}_l.t^i{}_j \qquad \text{ou} \qquad t^i{}_j = a^i{}_k.r^l{}_j.t'^k{}_l.$$

➢ Le tableau carré n×n représentant ce tenseur mixte ($t^i{}_j$) sera noté $T^i{}_{jCa}$. On démontre, de la même façon que pour les tenseurs deux fois covariants et contravariants, les formules suivantes :

$$T^i{}_j{}'_{Ca} = A^{-1}.T^i{}_{jCa}.A \qquad \text{et} \qquad T^i{}_{jCa} = A.T^i{}_j{}'_{Ca}.\,A^{-1} \quad \text{ou encore,}$$

entre les matrices colonnes :

$$\mathcal{T}^i{}_j{}'_C = A^{-1}\otimes{}^tA.\mathcal{T}^i{}_{jC} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}^i{}_{jC} = A\otimes\tilde{A}.\mathcal{T}^i{}_j{}'_C,$$

les relations entre les matrices lignes s'en déduisant immédiatement en transposant.

D’où, le :

Tableau récapitulatif pour les tenseurs mixtes du second ordre

$T_i^{j}{}'_{Ca} = {}^tA.T_i^{j}{}_{Ca}.\tilde{A}$	$T_i^{j}{}_{Ca} = \tilde{A}.T_i^{j}{}'_{Ca}.{}^tA$
$\mathcal{T}_i^{j}{}'_C = {}^tA \otimes A^{-1}.\mathcal{T}_i^{j}{}_C$	$\mathcal{T}_i^{j}{}_C = \tilde{A} \otimes A.\mathcal{T}_i^{j}{}'_C$
$T^i_j{}'_{Ca} = A^{-1}.T^i_{jCa}.A$	$T^i_{jCa} = A.T^i_j{}'_{Ca}.A^{-1}$
$\mathcal{T}^i_j{}'_C = A^{-1} \otimes {}^tA.\mathcal{T}^i_{jC}$	$\mathcal{T}^i_{jC} = A \otimes \tilde{A}.\mathcal{T}^i_j{}'_C$

Tenseurs d’ordre supérieur au second

Considérons p vecteurs **X**, **Y***, **Z** … soit dans E_n soit dans l’espace dual E_n*. À ce groupe de vecteurs, on peut associer un nombre réel f(**X**, **Y***, **Z** …) qui soit une fonction linéaire séparément de **X**, **Y***, **Z** … Ce nombre définit une **forme multilinéaire** sur l’ensemble produit $E_n \times E_n^* \times E_n \times \ldots$

C’est un élément de l’espace vectoriel à n^p dimensions, produit tensoriel de p espaces E_n ou E_n* : $E_n^* \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \ldots$ Par définition, c’est un **tenseur affine d’ordre p** attaché à l’espace vectoriel E_n.

Exemple : un tenseur d’ordre 4, à partir de **X** et **Z**$\in E_n$ et **Y*** et **V***$\in E_n$*.

f(**X**, **Y***, **Z, V*** …) = $x^{i_1}.y_{j_1}.z^{i_2}.v_{j_2}.m(\mathrm{e}_{i_1}, \mathrm{e}^{j_1}, \mathrm{e}_{i_2}, \mathrm{e}^{j_2}) = t_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}.x^{i_1}.y_{j_1}.z^{i_2}.v_{j_2}$.

Ce tenseur est deux fois contravariant et deux fois covariant.

Les composantes se transforment, par changement de base, suivant les formules :

$$t'_{k_1}{}^{l_1}{}_{k_2}{}^{l_2} = a^{i_1}{}_{k_1}.r^{l_1}{}_{j_1}.a^{i_2}{}_{k_2}.r^{l_2}{}_{j_2}.t_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2} \qquad \text{et} \qquad t_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2} = r^{k_1}{}_{i_1}.a^{j_1}{}_{l_1}.r^{k_2}{}_{i_2}a^{j_2}{}_{l_2}.t'_{k_1}{}^{l_1}{}_{k_2}{}^{l_2}$$

et sous la forme des matrices colonnes :

$$\mathcal{T}_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}{}'_C = {}^tA \otimes A^{-1} \otimes {}^tA \otimes A^{-1}.\mathcal{T}_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}{}_C \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}{}_C = \tilde{A} \otimes A \otimes \tilde{A} \otimes A.\mathcal{T}_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}{}'_C\,.$$

La généralisation à tous les ordres est immédiate.

Remarque : un vecteur peut être considéré comme un tenseur du premier ordre, un scalaire comme un tenseur d'ordre zéro.

Nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages spécialisés, pour l'étude des critères de tensorialité, des opérations sur les tenseurs (somme, produit, contraction) et des tenseurs symétriques.

DEUXIÈME PARTIE : algèbre des tenseurs euclidiens

En préparation.