Les analogies en physique : un exemple historique

RÉSUMÉ

Nous revenons sur la comparaison des théories élastique et électromagnétique de la lumière, telle qu'elle a été enseignée par Henri POINCARÉ à la fin du 19ème siècle, et précisons l'analogie entre la propagation des ondes planes transversales dans un milieu élastique et la propagation des ondes électromagnétiques.

INTRODUCTION

Dans un article publié dans *Le Bup* en 2001 [1], Jean SIVARDIÈRE dresse un tableau presque exhaustif des analogies entre systèmes physiques de natures différentes. L'auteur insiste également sur leur intérêt scientifique et pédagogique.

Lorsque deux systèmes peuvent être représentés par des modèles utilisant le même nombre de paramètres et de variables et décrits par un même formalisme mathématique, on parle d'analogie. Les résultats obtenus pour l'un, qu'ils soient expérimentaux ou théoriques, peuvent être transposés à l'autre par un simple changement de notation.

Il y a analogie par exemple, entre un oscillateur mécanique amorti et un oscillateur électrique RLC, ou encore entre le mouvement de l'électron autour du proton dans le modèle classique de l'atome d'hydrogène et le mouvementképlérien d'une planète autour du soleil… Une vingtaine d'analogies sont ainsi citées ou même développées.

Dans le prolongement de cette étude, il paraît intéressant de reprendre la « *Théorie mathématique de la lumière* » enseignée pendant le premier semestre 1891-1892 par Henri POINCARÉ et publiée par l'Association Amicale des Élèves et Anciens Élèves de la Faculté des Sciences de Paris en 1892 [2].

À cette époque, deux théories se partagent les faveurs des physiciens : la théorie ondulatoire élaborée, notamment par FRESNEL, à partir de 1815 et la théorie électromagnétique de MAXWELL dont les fameuses équations datent, alors, d'un peu moins de trois décennies et qui « *a conquis une place qu'on lui contestait encore quelques années auparavant.* » Henri POINCARÉ présente donc dans son cours ces deux approches des phénomènes lumineux :

- la **théorie** dite **élastique de la lumière** qui est celle des fondateurs de la théorie ondulatoire ;
- la **théorie électromagnétique** qu'il compare à la première.

1. « THÉORIE ÉLASTIQUE DE LA LUMIÈRE »

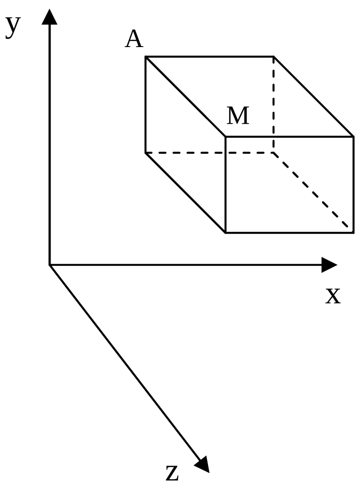
« *Cette théorie attribue les phénomènes lumineux aux vibrations d'un milieu élastique,* ***l'éther****, répandu dans tout l'espace, même dans le vide* » ([2], p. 1).

Les principales étapes de l'exposé d'Henri POINCARÉ seront rappelées, avec des notations identiques pour la plupart à celles utilisées à l'origine et toujours en vigueur dans les ouvrages traitant de la propagation des vibrations dans les milieux élastiques.

L'auteur fait référence à plusieurs reprises à son « Cours d'élasticité » parce que, appliquée à l'éther, la théorie générale de l'élasticité, déjà bien élaborée à cette époque, donne les relations entre les déformations et les forces.

1.1 Mouvement de l'éther et déformations

Une « *molécule d'éther* » qui, dans l'état d'équilibre, occupe la position M, viendra, par suite de la vibration, occuper une position telle que M'. Par rapport au repère Oxyz, x, y, z étant les coordonnées du point M, $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ celles du point M', les projections du déplacement $\overrightarrow{MM'}$ sur les axes de coordonnées seront ξ, η, ζ et les composantes de sa vitesse et de son accélération : $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$.



Un parallélépipède rectangle élémentaire, de centre M, de côtés parallèles aux axes, dx, dy, dz et de volume $d\tau = dx.dy.dz$, se déplace et se déforme pendant la vibration sous l'action des forces de cohésion intérieures au solide. Il devient un parallélépipède curviligne qui peut être assimilé, au 2ème ordre près, à un parallélépipède rectiligne oblique.

Les longueurs des arêtes du parallélépipède et les trois angles du trièdre A deviennent respectivement:

$dx\,(1 + \alpha_1)$ $\qquad$ $dy\,(1 + \alpha_2)$ $\qquad$ $dz\,(1 + \alpha_3)$

$\frac{\pi}{2} - 2\beta_1$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} - 2\beta_2$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} - 2\beta_3$ $\qquad$ avec

$\alpha_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\qquad$ $\alpha_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}$ $\qquad$ et $\qquad$ $\alpha_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ $\qquad$ les dilatations linéaires et

$\beta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$, $\qquad$ $\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$ $\qquad$ et $\qquad$ $\beta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ $\qquad$ les glissements.

L'élément de volume devient après la déformation :

$dx\,(1 + \alpha_1).dy\,(1 + \alpha_2).dz\,(1 + \alpha_3) \approx d\tau\,(1 + \theta)$ au 2ème ordre près avec

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \qquad (1)$$

AVERTISSEMENT

Les pages 3 et 5 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

1.4 Intensité lumineuse

Diverses définitions expérimentales sont envisagées. Pour la définition théorique, l'auteur suppose que l'intensité est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de l'éther (elle-même proportionnelle au carré de l'amplitude si la vibration est harmonique) ou encore à l'énergie potentielle ou à l'énergie totale moyenne.

1.5 Autres formes des équations du mouvement

En l'absence de vibrations longitudinales et donc avec la condition $\lambda_L + 2\mu_L = 0$, les équations (2) deviennent :

$$\rho.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mu_L(\Delta\xi - \frac{\partial\theta}{\partial x}), \qquad \rho.\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \mu_L(\Delta\eta - \frac{\partial\theta}{\partial y}), \qquad \rho.\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \mu_L(\Delta\zeta - \frac{\partial\theta}{\partial z}).$$

Après dérivation de ces équations par rapport à x, y et z et addition, il vient :

$\rho.\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \mu_L(\Delta\theta - \Delta\theta) = 0$ et en intégrant par rapport au temps : $\theta = A + B.t$, A et B étant deux constantes. Il en résulte que si à $t = 0$, $\theta = 0$ et $\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ parce que l'éther est au repos à cette date, **la dilatation cubique θ est constamment nulle**.

Les équations du mouvement prennent alors la forme :

$$\rho.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mu_L.\Delta\xi, \qquad \rho.\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \mu_L.\Delta\eta, \qquad \rho.\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \mu_L.\Delta\zeta. \qquad (4)$$

En introduisant u, v et w définies à une constante près par les relations :

$$\frac{1}{\mu_L}.\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}, \qquad \frac{1}{\mu_L}.\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\mu_L}.\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}, \qquad (5)$$

on trouve $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial z\partial t} = \mu_L(\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \Delta\xi)$ et comme $\theta = 0$, il vient grâce à (4) :

$$\rho.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -(\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial t}) \text{ ; de même } \quad \rho.\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}) \quad \rho.\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}). \qquad (6)$$

1.6 Forme moderne des équations, pour les ondes planes transversales

Avec les opérateurs de l'analyse vectorielle, les équations précédentes s'écrivent :

(1) : $\boldsymbol{\theta = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{MM'}) = 0}$; (7)

$\vec{h}$ étant le vecteur de composantes (u,v,w) et $\vec{h}'$ sa dérivée partielle par rapport à t,

(5) : $\boldsymbol{\vec{h}' = \mu_L.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{MM'})}$; (8)

4. COMPARAISON DES DEUX THÉORIES

– Deux modes de comparaison sont possibles. On peut, en effet, passer des équations (13) et (14) aux équations (9) et (10) suivant les deux correspondances suivantes :

- ▶ $\overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{v(M)}$, $\mu \longrightarrow \frac{1}{\mu_L}$, $\overrightarrow{H} \longrightarrow -\overrightarrow{h'}$, $\varepsilon \longrightarrow \rho$ ou

- ▶ $\overrightarrow{H} \longrightarrow \overrightarrow{v(M)}$, $\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{\mu_L}$, $\overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{h'}$ et $\mu \longrightarrow \rho$.

Henri POINCARÉ interprète ces deux analogies en considérant que « *la théorie électromagnétique étant fondée sur des expériences assez certaines pour garder sa place, ce sont les théories élastiques qui doivent se concilier avec elle et n'en être qu'une traduction.* » ([2] p. 26)

Dans le premier mode de comparaison, qui correspond au point de vue de FRESNEL, $\overrightarrow{E}$ étant perpendiculaire au plan de polarisation (qui est le plan contenant le vecteur d'onde et $\overrightarrow{H}$), la vibration de l'éther serait dans ce cas perpendiculaire au plan de polarisation ; ε dépendant du milieu considéré, la densité de l'éther serait variable d'un corps à l'autre et μ pouvant être considéré comme pratiquement constant – sauf dans les milieux ferromagnétiques – les coefficients de Lamé de l'éther seraient constants.

Dans le second cas, qui correspond au point de vue de NEUMANN, le déplacement de l'éther serait parallèle au plan de polarisation, sa densité constante et son élasticité variable.

Plusieurs hypothèses sur les propriétés mécaniques de l'éther sont ainsi suggérées à partir des propriétés électriques des matériaux. Il y a là une illustration de la fécondité en recherche des analogies, soulignée par Jean SIVARDIÈRE [1].

– Nous pouvons compléter ces comparaisons en considérant les équations d'onde auxquelles satisfont les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$:

- $$\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu.\varepsilon}.\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\mathbf{E}} \qquad (15)$$
- $$\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu.\varepsilon}.\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\mathbf{H}}. \qquad (16)$$

– Henri POINCARÉ montre également que la 1ère correspondance s'applique aux relations énergétiques. L'énergie électromagnétique égale à la somme des énergies électrostatique et magnétique :

$$\int \left(\frac{\varepsilon.E^2}{2} + \frac{\mu.H^2}{2}\right).d\tau \text{ correspond en effet à : } \int \left\{\frac{\rho}{2}[\overrightarrow{v(M)}]^2 + \frac{1}{2\mu_L}(\overrightarrow{h'})^2\right\}.d\tau,$$

c'est-à-dire à l'énergie mécanique totale, somme de l'énergie cinétique $\int \frac{\rho}{2}[\overrightarrow{v(M)}]^2.d\tau$ et du terme $\int \frac{1}{2\mu_L}(\overrightarrow{h'})^2.d\tau$ dont le calcul conduit à l'énergie potentielle de l'éther.

Mais *« la comparaison* (pour l'énergie) *entre la théorie de* NEUMANN *et celle de* MAXWELL *présenterait plus de difficultés. »* ([2] p. 30)

CONCLUSION

Associée à l'hypothèse de l'éther, l'analogie entre la propagation des ondes transversales dans les milieux élastiques solides et la propagation des ondes électromagnétiques explique le développement, durant tout le 19$^{\text{ème}}$ siècle, de la théorie ondulatoire de la lumière élaborée par FRESNEL à partir de 1815. En ce sens, elle a un caractère historique.

Quant aux succès de l'interprétation mécaniste de la lumière dans l'explication des phénomènes lumineux, ils ont induit en erreur, sur la vraie nature des ondes lumineuses, plusieurs générations de théoriciens dont certains ont même combattu les idées de MAXWELL. Il convient donc de souligner la prudence de POINCARÉ qui écrit en 1892 ([2] Introduction) : *« Je ne me suis pas proposé de comparer ces deux doctrines afin de choisir entre elles. »* Concernant l'éther, Christian MARCHAL précise dans un article récent [4], la pensée de POINCARÉ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SIVARDIÈRE J. Les analogies en physique. *Bull. Un. Phys.*, février 2001, n° 831.

[2] POINCARÈ H. Théorie mathématique de la lumière.1889 et 1892. *Éditions J. GABAY*, octobre 1995.

[3] BRUHAT G. Cours de Physique Générale. Mécanique. *Éditions MASSON*, 1961.

[4] MARCHAL C. Henri POINCARÉ : une contribution décisive à la relativité. *Bull. Un. Phys.*, mai 2005, n° 874.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

LEÇONS SUR LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA LUMIÈRE

Professées pendant le premier semestre 1887-1888

PAR

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

Rédigées par J. BLONDIN, licencié ès sciences

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58
—
1889