

Extinction, absorption et diffusion par les particules

Chapitre 1 - La diffusion simple par une particule

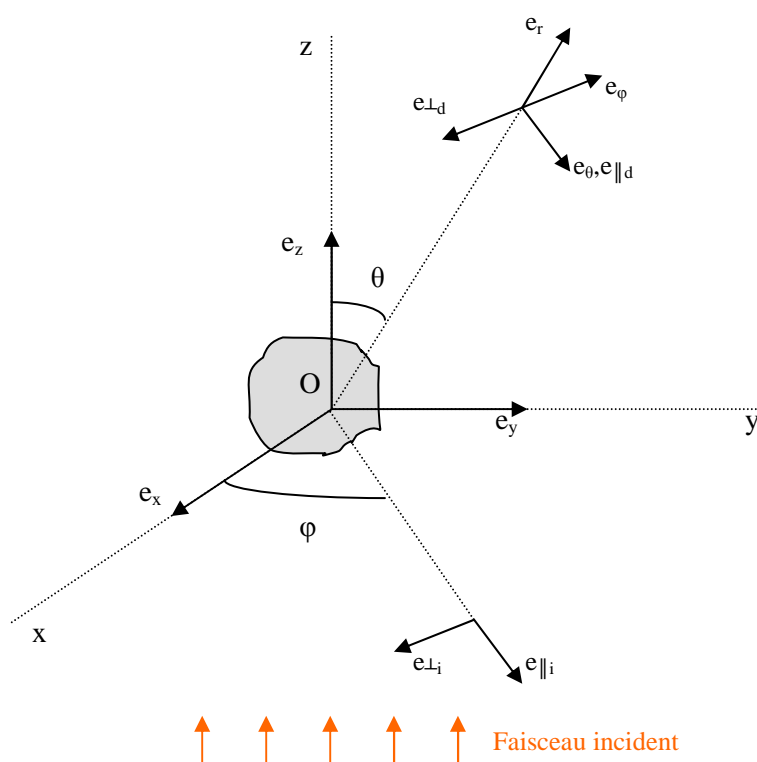
La plupart des définitions et résultats présentés dans ce chapitre sont extraits de l'ouvrage [1] de Bohren et Huffman.

1-1 - Généralités

Considérons une **particule quelconque** illuminée par une **onde plane harmonique**. La direction de propagation de la lumière incidente définit \vec{e}_z et l'axe des z.

Le champ électromagnétique incident sur la particule induit des champs électriques \vec{E}_i et magnétiques \vec{H}_i à l'intérieur de la particule et des champs diffusés, \vec{E}_d et \vec{H}_d , à l'extérieur.

Nous nous intéressons à la lumière diffusée dans la direction \vec{e}_r , à une distance r de la particule.



L'origine O est un point quelconque situé à l'intérieur de la particule.

\vec{e}_r définit avec \vec{e}_z le **plan de diffusion**. Ce plan est déterminé par l'angle azimutal φ , sauf si : $\vec{e}_r = \pm \vec{e}_z$, auquel cas tout plan contenant l'axe des z peut être considéré comme un plan de diffusion.

Les vecteurs $\vec{e}_{\parallel i}$ et $\vec{e}_{\perp i}$ du plan $z = 0$, respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de diffusion, constituent avec \vec{e}_z une base orthonormée : $\vec{e}_{\perp i} \times \vec{e}_{\parallel i} = \vec{e}_z$.

Les vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ , et \vec{e}_φ constituent la base

orthonormée associée au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

On dispose également des vecteurs unitaires : $\vec{e}_{\parallel d} = \vec{e}_\theta$, parallèle au plan de diffusion et

$\vec{e}_{\perp d} = -\vec{e}_{\varphi} = \vec{e}_{\perp i}$, perpendiculaire au plan de diffusion qui constituent avec \vec{e}_r une base orthonormée : $\vec{e}_{\perp d} \times \vec{e}_{\parallel d} = \vec{e}_r$.

La dépendance temporelle des champs choisie est $e^{-i.\omega.t}$. Le **champ électrique incident**, situé dans le plan xOy s'écrit donc : $\vec{E}_i = \vec{E}_{ix} + \vec{E}_{iy} = \vec{E}_0 . e^{(i.k.z - i.\omega.t)}$.

Il est commode de décomposer \vec{E}_i , suivant les deux directions perpendiculaire et parallèle au plan de diffusion :

$$\vec{E}_i = (\mathbf{E}_{0\parallel} . \vec{e}_{\parallel i} + \mathbf{E}_{0\perp} . \vec{e}_{\perp i}) . e^{(i.k.z - i.\omega.t)} = E_{i\parallel} . \vec{e}_{\parallel i} + E_{i\perp} . \vec{e}_{\perp i} \quad (1),$$

où $k = \frac{2\pi.N}{\lambda_0}$ est le **nombre d'onde angulaire** dans le milieu environnant d'indice N, les composantes du champ incident suivant Ox et Oy étant telles que :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i\parallel} &= \cos \varphi . \vec{E}_{ix} + \sin \varphi . \vec{E}_{iy}, \\ \vec{E}_{i\perp} &= \sin \varphi . \vec{E}_{ix} - \cos \varphi . \vec{E}_{iy} \end{aligned} \quad (2).$$

1-2 - La matrice de diffusion d'amplitude

A des distances de l'origine suffisamment grandes ($k.r \gg 1$), le champ électrique diffusé est approximativement transversal et a la forme asymptotique ([2] – Jackson, édition en langue française, p. 454) :

$$\vec{E}_d \approx \frac{e^{i.k.(r-z)}}{-i.k.r} . \vec{A} \text{ avec } \vec{e}_r . \vec{A} = 0 \quad (3).$$

Dans ces conditions, le champ diffusé peut s'écrire

$$\vec{E}_d = E_{d\parallel} . \vec{e}_{\parallel d} + E_{d\perp} . \vec{e}_{\perp d} \quad (4).$$

En raison de la linéarité des conditions aux limites relatives aux champs électriques et magnétiques lors de la traversée des surfaces de séparation entre milieux différents, l'amplitude du champ diffusé par une particule quelconque est une fonction linéaire du champ incident. La relation entre les champs incident et diffusé peut donc s'écrire sous la forme d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{d\parallel} \\ \mathbf{E}_{d\perp} \end{pmatrix} = \frac{e^{i.k.(r-z)}}{-i.k.r} . \begin{pmatrix} \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i\parallel} \\ \mathbf{E}_{i\perp} \end{pmatrix} \quad (5),$$

où les éléments S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) de la **matrice de diffusion d'amplitude** dépendent, en général, de θ l'angle de diffusion et de l'angle azimutal φ .

AVERTISSEMENT

Les pages 3, 7, 9 et 12 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

$$\begin{aligned}
W_i &= - \int_A \overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{e}_r \cdot dA \\
W_d &= \int_A \overrightarrow{S}_d \cdot \overrightarrow{e}_r \cdot dA \\
W_{\text{ext}} &= - \int_A \overrightarrow{S}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{e}_r \cdot dA
\end{aligned}
\tag{12}.$$

$$\text{D'après (7) : } W_a = W_i - W_d + W_{\text{ext}} \tag{13}.$$

Pour un milieu non-absorbant, les flux à travers A, entrant et sortant, du champ incident sont égaux en valeur absolue : $W_i = 0$ et

$$W_{\text{ext}} = W_a + W_d \tag{14}.$$

W_{ext} , égal à la somme des énergies absorbée et diffusée par unité de temps par la particule représente l'**extinction** ou l'**atténuation** de l'onde incidente.

1-4 - Sections efficaces et facteurs d'efficacité

Le rapport de W_{ext} à l'intensité du faisceau incident $I_i = \|\overrightarrow{S}_i\|$ a les dimensions d'une surface. Il définit la **section efficace d'extinction** :

$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_i} \tag{15}.$$

On définit de la même façon les **sections efficaces d'absorption** et de **diffusion** et :

$$C_{\text{ext}} = C_a + C_d \tag{16}.$$

On définit également les **facteurs d'efficacité d'extinction, d'absorption** et de **diffusion** en divisant les sections efficaces par la surface S_p de la projection de la particule sur un plan perpendiculaire au faisceau incident (pour une sphère de rayon a : $S_p = \pi \cdot a^2$) :

$$Q_{\text{ext}} = \frac{C_{\text{ext}}}{S_p} = Q_a + Q_d \tag{17}.$$

L'**albédo** représente la blancheur du diffuseur, c'est-à-dire la fraction d'énergie diffusée sur l'énergie totale atténuée :

$$\omega = \frac{Q_d}{Q_{\text{ext}}} = \frac{C_d}{C_{\text{ext}}} \tag{18}.$$

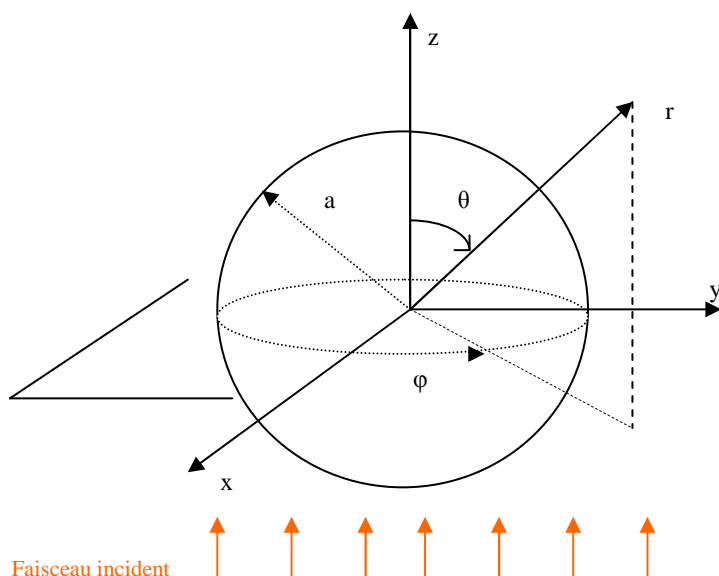
Chapitre 2 - La théorie de Mie

C'est le physicien allemand Gustave Mie qui, le premier, alors qu'il étudiait les solutions colloïdales d'or dans l'eau, donna en 1908 une solution complète au difficile problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par une sphère isolée placée dans un milieu non absorbant.

Le lecteur intéressé trouvera dans la littérature des présentations détaillées de cette théorie, notamment par Bohren et Huffman – [1] et Born et Wolf – [3]. Elles constituent un exercice de physique théorique classique certainement utile pour une bonne compréhension de cette question. Nous nous contenterons d'en rappeler les principaux résultats dont l'utilisation a été freinée pendant plusieurs décennies par la lourdeur des calculs nécessaires aux applications numériques. L'arrivée massive des ordinateurs dans les laboratoires a levé cet obstacle et mis les développements de la théorie de Mie à la portée de tous.

La forme sphérique est évidemment très répandue dans la nature. Il suffit de penser aux gouttelettes d'eau des nuages et brouillards ou aux particules des aérosols. De plus, l'étude optique des milieux hétérogènes fait appel, assez systématiquement, à la sphère – ou à une forme approchée – comme représentation modélisée de la forme des inclusions réparties dans la matrice. On comprend donc l'importance de la théorie de Mie qui est le point de départ d'une foule de développements dans plusieurs domaines des sciences appliquées.

2-1 – Equation d'onde vectorielle



On considère une sphère homogène de rayon a , de permittivité électrique $\epsilon_1 = \epsilon_0 N_1^2$ et de perméabilité magnétique μ_1 , plongée dans un milieu linéaire, isotrope, homogène, de fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon_0 N^2$ et de perméabilité magnétique μ et illuminée par une onde plane harmonique de longueur d'onde λ_0 dans le vide.

Les solutions du problème posé, c'est-à-dire les expressions des champs électromagnétiques intérieurs à la sphère et diffusés,

doivent satisfaire les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} &= i.\omega.\mu. \overrightarrow{H} & \text{et} & \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} = -i.\omega.\epsilon. \overrightarrow{E} \\ \text{div} \overrightarrow{E} &= 0 & \text{et} & \text{div} \overrightarrow{H} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ainsi que les équations d'onde vectorielles qui en découlent :

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{E} + k^2. \overrightarrow{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{H} + k^2. \overrightarrow{H} = 0 \quad (2),$$

avec: $k^2 = \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu$ (3).

La résolution des équations vectorielles peut être simplifiée en construisant la fonction vectorielle :

$$\vec{M} = \text{rot}(\psi \cdot \vec{c}) = -\vec{c} \times \text{grad} \psi \quad (4),$$

ψ étant une fonction scalaire et \vec{c} un vecteur constant arbitraire.

\vec{M} étant un rotationnel, $\text{div} \vec{M} = 0$ et on montre que pour que \vec{M} satisfasse l'équation d'onde vectorielle il faut que ψ soit une solution de l'équation d'onde scalaire :

$$\Delta \psi + k^2 \cdot \psi = 0 \quad (5).$$

Dans ces conditions le vecteur :

$$\vec{N} = \frac{\text{rot} \vec{M}}{k} \quad (6)$$

satisfait lui aussi l'équation vectorielle.

On a également les relations $\text{div} \vec{N} = 0$ et $\text{rot} \vec{N} = k \cdot \vec{M}$, c'est-à-dire que \vec{M} et \vec{N} ont toutes les propriétés requises pour être considérés comme un champ électromagnétique. La fonction génératrice ψ dont dérivent \vec{M} et \vec{N} est le potentiel scalaire de Hertz-Debye.

2-2 – Résolution de l'équation d'onde

La principale difficulté du problème posé vient de ce que la symétrie du système oblige pratiquement à résoudre l'équation d'onde scalaire dans un système de coordonnées sphériques, alors même que l'onde incidente est plane.

Si, de plus, nous choisissons pour vecteur pilote \vec{c} le rayon vecteur \vec{r} , alors \vec{M} sera solution de l'équation d'onde vectorielle en coordonnées sphériques.

En coordonnées sphériques l'équation (5) s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \cdot \psi = 0 \quad (7).$$

Sa résolution, classique, utilise pour $\psi(r, \theta, \varphi)$ des solutions particulières de la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi).$$

- ▶ $\Phi(\varphi) = \cos m \cdot \varphi$ ou $\sin m \cdot \varphi$, m entier ≥ 0 ;
- ▶ $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$, **fonctions de Legendre associées** de première espèce de degré n et d'ordre m , où $n = m, m + 1, \dots$. Lorsque $m = 0$ les fonctions de Legendre associées sont les polynômes de Legendre notés P_m ;
- ▶ $R(r) = z_n(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, une des **fonctions de Bessel sphériques** définies par :

$$\begin{aligned} \vec{N}_{p1n} = & \cos \varphi \cdot n(n+1) \cdot \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cdot \vec{e}_r \\ & + \cos \varphi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \cdot \vec{e}_\theta - \sin \varphi \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (13),$$

les dérivées notées ' en exposants étant prises par rapport à ρ et les premiers termes des fonctions π_n , τ_n , $j_n(k.r)$ et $y_n(k.r)$ égaux à (Angot, André. Compléments de Mathématiques. Masson. 1972) :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1 & \tau_1 &= \cos \theta \\ \pi_2 &= 3 \cos \theta & \tau_2 &= 3 \cos 2\theta = 3(2 \cos^2 \theta - 1) \\ \pi_3 &= \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) & \tau_3 &= \frac{3}{2} \cos \theta (15 \cos^2 \theta - 11) \\ \pi_4 &= \frac{5}{2} \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3) & \tau_4 &= \frac{5}{2} (28 \cos^4 \theta - 27 \cos^2 \theta + 3) \\ \pi_5 &= \frac{5}{8} (63 \cos^4 \theta - 42 \cos^2 \theta + 3) & \tau_5 &= \frac{15}{8} \cos \theta (105 \cos^4 \theta - 126 \cos^2 \theta + 29) \\ & & \dots & \\ j_0(k.r) &= \frac{\sin(k.r)}{k.r} & y_0(k.r) &= -\frac{\cos(k.r)}{k.r} \\ j_1(k.r) &= \frac{\sin(k.r)}{(k.r)^2} - \frac{\cos(k.r)}{k.r} & y_1(k.r) &= -\frac{\cos(k.r)}{(k.r)^2} - \frac{\sin(k.r)}{k.r} \\ j_2(k.r) &= 3 \frac{\sin(k.r)}{(k.r)^3} - 3 \frac{\cos(k.r)}{(k.r)^2} - \frac{\sin(k.r)}{k.r} & y_2(k.r) &= -3 \frac{\cos(k.r)}{(k.r)^3} - 3 \frac{\sin(k.r)}{(k.r)^2} + \frac{\cos(k.r)}{k.r} \\ & & \dots & \end{aligned} \quad (14).$$

2-3 – Expressions des champs

Les vecteurs \vec{M} et \vec{N} constituent donc une base sur laquelle nous allons développer les champs incidents, diffusés et intérieurs à la sphère.

C'est ainsi que si le champ incident est polarisé selon l'axe des x,

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 \cdot e^{i.k.r \cdot \cos \theta} \cdot \vec{e}_x = E_0 \cdot e^{i.k.z} \cdot \vec{e}_x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{pmn} \cdot \vec{M}_{pmn} + B_{imn} \cdot \vec{M}_{imn} + A_{pmn} \cdot \vec{N}_{pmn} + A_{imn} \cdot \vec{N}_{imn}) \end{aligned} \quad (15),$$

$$\text{avec } \vec{e}_x = \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_\theta - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \cos \varphi \cdot \vec{e}_{\parallel i} + \sin \varphi \cdot \vec{e}_{\perp i} \quad (16).$$

On montre ensuite que tous les vecteurs \vec{M}_{pmn} , \vec{M}_{imn} , \vec{N}_{pmn} et \vec{N}_{imn} sont orthogonaux deux à deux (quelles que soient les valeurs des m et des n). Cette orthogonalité permet de démontrer que seuls les coefficients B_{i1n} et A_{p1n} , pour lesquels $m = 1$ sont différents de 0. Leur calcul conduit à :

$$\vec{E}_i = E_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} i^n \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)} (\vec{M}_{i1n}^{(j_n)} - i \cdot \vec{N}_{p1n}^{(j_n)}) \quad (17),$$

les (j_n) en exposants signifiant que la fonction de Bessel qu'il faut choisir, puisque \vec{E}_i est fini à l'origine, est $j_n(k.r)$ et non pas $y_n(k.r)$ qui tend vers l'infini lorsque r tend vers zéro.

$$\begin{cases} c_n = m \frac{\psi_n(\mathbf{x}) \cdot \xi_n'(\mathbf{x}) - \xi_n(\mathbf{x}) \cdot \psi_n'(\mathbf{x})}{\psi_n(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \cdot \xi_n'(\mathbf{x}) - m \cdot \xi_n(\mathbf{x}) \cdot \psi_n'(\mathbf{m}, \mathbf{x})}, \\ d_n = m \frac{\psi_n(\mathbf{x}) \cdot \xi_n'(\mathbf{x}) - \xi_n(\mathbf{x}) \cdot \psi_n'(\mathbf{x})}{m \cdot \psi_n(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \cdot \xi_n'(\mathbf{x}) - \xi_n(\mathbf{x}) \cdot \psi_n'(\mathbf{m}, \mathbf{x})} \end{cases} \quad \text{où} \quad (25)$$

ψ_n et ξ_n sont les **fonctions de Riccati-Bessel** d'ordre n : $\psi_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{x})$ et $\xi_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}_n^{(1)}(\mathbf{x})$, les exposants ' indiquant les dérivées par rapport aux grandeurs entre parenthèses.

Les résultats précédents, notamment les expressions des champs, ont été obtenus pour un champ incident polarisé suivant l'axe des x . Mais la symétrie de la particule nous permet de déterminer les champs diffusés pour une onde incidente plane dont l'état de polarisation est quelconque puisque, par exemple, les champs électriques de deux ondes de même amplitude et polarisées suivant Ox et Oy sont tels que : $E_d(\varphi; Ox) = E_d(\varphi + \frac{\pi}{2}; Oy)$.

2-4 – Sections efficaces et facteurs d'efficacité

Les expressions précédentes des champs permettent, lorsque la particule est plongée dans un milieu non-absorbant, le calcul des flux W_{ext} et W_d définis au paragraphe 1-3 et que l'on sait, pour la sphère, indépendants de l'état de polarisation de l'onde incidente.

Les calculs conduisent aux sections efficaces :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ de diffusion : } C_d &= \frac{W_d}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \\ \blacktriangleright \text{ d'extinction : } C_{\text{ext}} &= C_d + C_a = \frac{W_{\text{ext}}}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \text{Re}\{a_n + b_n\} \end{aligned} \quad (26).$$

On en déduit immédiatement, d'après 1-(17), les facteurs d'efficacité d'extinction, de diffusion et d'absorption. C'est ainsi que :

$$Q_{\text{ext}} = \frac{C_{\text{ext}}}{\pi \cdot a^2} = \frac{2}{X^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \text{Re}\{a_n + b_n\} = Q_d + Q_a \quad (27).$$

2-5 – Champ diffusé à grande distance

Pour $k \cdot r \gg n^2$, les expressions asymptotiques de la fonction de Hankel $h_n^{(1)}$ et de sa dérivée sont de la forme :

$$h_n^{(1)} \approx \frac{(-i)^n \cdot e^{i \cdot k \cdot r}}{i \cdot k \cdot r}, \quad \frac{d h_n^{(1)}}{d(k \cdot r)} \approx \frac{(-i)^n \cdot e^{i \cdot k \cdot r}}{k \cdot r} \quad (28).$$

Si nous substituons ces expressions dans le développement (21) en utilisant les coordonnées (13) des vecteurs harmoniques sphériques, les composantes transversales du champ lointain s'écrivent:

$$\begin{aligned}
E_{d\theta} &\approx \cos \varphi \cdot E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \tau_n(\cos \theta) + b_n \cdot \pi_n(\cos \theta)], \\
E_{d\varphi} &\approx -\sin \varphi \cdot E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \pi_n(\cos \theta) + b_n \cdot \tau_n(\cos \theta)], \\
H_{d\theta} &\approx \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot \sin \varphi \cdot E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \pi_n(\cos \theta) + b_n \cdot \tau_n(\cos \theta)] \text{ et} \\
H_{d\varphi} &\approx \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot \cos \varphi \cdot E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \tau_n(\cos \theta) + b_n \cdot \pi_n(\cos \theta)] \quad (29).
\end{aligned}$$

On retrouve la structure d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{k} \times \vec{E}_d = \omega \cdot \mu \cdot \vec{H}_d \quad (30),$$

et, bien sûr, la forme générale 1-(3) du champ diffusé à grande distance avec :

$\vec{A} = \vec{X} \cdot E_i = \vec{X} \cdot E_0 \cdot e^{i.k.z}$, \vec{X} étant le **vecteur amplitude de diffusion** pour un champ incident polarisé suivant Ox. Ses coordonnées sphériques sont égales à :

$$\begin{aligned}
X_\theta &\approx \cos \varphi \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \tau_n(\cos \theta) + b_n \cdot \pi_n(\cos \theta)], \\
X_\varphi &\approx -\sin \varphi \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \pi_n(\cos \theta) + b_n \cdot \tau_n(\cos \theta)] \quad (31).
\end{aligned}$$

Le produit scalaire de \vec{X} pris dans la direction avant (pour $\theta = 0$) par le vecteur unitaire \vec{e}_x (16) :

$$(\vec{X} \cdot \vec{e}_x)_{\theta=0} \approx \cos^2 \varphi \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \tau_n(1) + b_n \cdot \pi_n(1)] + \sin^2 \varphi \cdot \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \cdot \pi_n(1) + b_n \cdot \tau_n(1)].$$

Or, on montre que : $\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$, d'où :

$$(\vec{X} \cdot \vec{e}_x)_{\theta=0} \approx \frac{1}{2} \sum_n (2n+1)(a_n + b_n), \text{ et}$$

$$\mathbf{C}_{\text{ext}} \approx \frac{4\pi}{k^2} \cdot \mathbf{Re}\{(\vec{X} \cdot \vec{e}_x)_{\theta=0}\} \quad (32).$$

L'extinction par la particule, qui est l'effet combiné de l'absorption dans la particule et de la diffusion par la particule **dans toutes les directions, ne dépend que de l'amplitude de diffusion dans la direction avant ($\theta = 0$)**.

Il s'agit là d'un résultat étonnant, qui de surcroît est valable pour toutes les particules, quelles que soient leurs formes. L'équation (32) est une forme particulière du *théorème optique* qui concerne de nombreux phénomènes de diffusion.

2-6 – Matrice de diffusion d'amplitude

De même :

$$i_{d\perp} = \frac{I_{d\perp}}{I_i} = \frac{|S_1(\cos \theta)|^2}{k^2 \cdot r^2} \quad (36),$$

et l'intensité de l'onde diffusée lointaine par unité d'intensité lumineuse incidente non polarisée :

$$i_d = \frac{1}{2}(i_{d\parallel} + i_{d\perp}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(|S_1|^2 + |S_2|^2)}{k^2 \cdot r^2} \quad (37).$$

Chapitre 3 - Sphères petites comparées à la longueur d'onde

3-1 – Coefficients de diffusion

On déduit des développements en séries entières des fonctions sphériques de Bessel et des formules 2-(24) (qui sont valables, rappelons-le, dans le cas où les perméabilités de la sphère et du milieu environnant sont égales), les termes d'ordre supérieur à 6 étant négligés :

$$a_1 = -\frac{i.2x^3}{3} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} - \frac{i.2x^5}{5} \cdot \frac{(m^2 - 2)(m^2 - 1)}{(m^2 + 2)^2} + \frac{4x^6}{9} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}\right)^2 + O(x^7),$$

$$b_1 = -\frac{i.x^5}{45} (m^2 - 1) + O(x^7), \quad a_2 = -\frac{i.x^5}{15} \cdot \frac{m^2 - 1}{2m^2 + 3} + O(x^7), \quad b_2 = O(x^7) \quad (1).$$

3-2 – Champ diffusé lointain

Si $|m|.x \ll 1$, alors $|b_1| \ll |a_1|$ et d'après 2-(34), en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3, les éléments de la matrice de diffusion d'amplitude :

$$S_1 \approx \frac{3}{2} [a_1 \cdot \pi_1(\cos \theta) + b_1 \cdot \tau_1(\cos \theta)] = \frac{3}{2} a_1,$$

$$S_2 \approx \frac{3}{2} [a_1 \cdot \tau_1(\cos \theta) + b_1 \cdot \pi_1(\cos \theta)] = \frac{3}{2} a_1 \cos \theta, \quad \text{avec } a_1 = -\frac{i.2x^3}{3} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \quad (2).$$

Si le champ incident est polarisé parallèlement au plan de diffusion, le champ diffusé lointain :

$$E_d \equiv E_{d\parallel} = E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \frac{3}{2} a_1 \cos \theta \quad (3).$$

De même, si le champ incident est polarisé perpendiculairement au plan de diffusion, le champ diffusé lointain :

$$E_d \equiv E_{d\perp} = E_0 \cdot \frac{e^{i.k.r}}{-i.k.r} \cdot \frac{3}{2} a_1 \quad (4).$$

L'intensité lumineuse diffusée lointaine lorsque la lumière incidente est polarisée parallèlement au plan de diffusion :

$$I_{d\parallel} = I_i \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{|a_1|^2 \cdot \cos^2 \theta}{k^2 \cdot r^2}, \text{ et}$$

l'intensité lumineuse diffusée par unité d'intensité incidente polarisée parallèlement au plan de diffusion :

$$i_{d\parallel} = \frac{I_{d\parallel}}{I_i} = \frac{9}{4} \cdot \frac{|a_1|^2 \cdot \cos^2 \theta}{k^2 \cdot r^2} \quad (5).$$

De même,

$$i_{d\perp} = \frac{I_{d\perp}}{I_i} = \frac{9}{4} \cdot \frac{|a_1|^2}{k^2 \cdot r^2} \quad (6),$$

et l'intensité de l'onde diffusée lointaine par unité d'intensité lumineuse incidente non polarisée :

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{1}{2}(i_{d\parallel} + i_{d\perp}) = \frac{9}{8} \frac{|a_I|^2}{k^2 \cdot r^2} (1 + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{8\pi^4 \cdot n^4 \cdot a^6}{\lambda^4 \cdot r^2} \cdot \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (7).$$

On retrouve la loi de Rayleigh : l'intensité diffusée par une très petite particule est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda^4}$.

3-3 – Facteurs d'efficacité

D'après 2-(27), le facteur d'efficacité de diffusion, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 :

$$\begin{aligned} Q_d &= \frac{C_d}{\pi \cdot a^2} = \frac{2}{x^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) (|a_I|^2 + |b_I|^2) \\ &= \frac{8}{3} \cdot x^4 \cdot \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 \end{aligned} \quad (8).$$

De même, le facteur d'efficacité d'extinction :

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext}} &= \frac{C_{\text{ext}}}{\pi \cdot a^2} = \frac{2}{x^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) \cdot \text{Re}\{a_n + b_n\} \\ &= \frac{2}{x^2} \cdot [3\text{Re}\{a_I + b_I\} + 5\text{Re}\{a_2 + b_2\}] \\ &= 4x \cdot \text{Im}\left\{ \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \left[1 + \frac{x^2}{15} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right) \frac{m^4 + 27m^2 + 38}{2m^2 + 3} \right] \right\} + \frac{8}{3} x^4 \cdot \text{Re}\left\{ \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

et le facteur d'efficacité d'absorption est calculé par la différence : $Q_a = Q_{\text{ext}} - Q_d$ (10).